

Chap 1. Numération

Livres p 241 – Chap 19 Représentation des entiers

1. Les entiers naturels

a. Définition

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel N , peut s'écrire : $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$

avec pour tout $i \in \{0; 1; \dots; n\} : 0 \leq a_i < b$

On dit alors que l'entier N s'écrit : $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ dans le système de numération à base b .

b. Les entiers en base 10 : Le système décimal

En numération décimale, il y a 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 10 qui lui est associée en partant de la droite. (unités, dizaines, centaines, milliers, ...)

Exemple : $2019 = 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$.

c. Les entiers en base 2 : le système binaire

En numération binaire, il n'y a que 2 chiffres : 0 et 1.

La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 2 qui lui est associée en partant de la droite.

Exemple :

$$11111100011_{b_2} = 1 \times 1024 + 1 \times 512 + 1 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$$

$$11111100011_{b_2} = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$11111100011_{b_2} = 2019_{b_{10}}$$

(noté aussi : $\overline{11111100011}^2$ ou $(11111100011)_2$ ou $11111100011b$ ou $0b11111100011$)

d. Les entiers en base 16 : le système hexadécimal

En numération hexadécimale, il y a 16 « chiffres » : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 16 qui lui est associée en partant de la droite.

Exemple : $7E3_{b_{16}} = 7 \times 256 + 14 \times 16 + 3 \times 1 = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0 = 2019_{b_{10}}$.

(noté aussi : $\overline{7E3}^{16}$ ou $(7E3)_{16}$ ou $7E3h$ ou $0x7e3$)

e. Premières valeurs

	Binaire	Hexa
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

	Binaire	Hexa
16	10000	10
17	10001	11
18	10010	12
19	10011	13
20	10100	14
21	10101	15
22	10110	16
23	10111	17
24	11000	18
25	11001	19
26	11010	1A
27	11011	1B
28	11100	1C
29	11101	1D
30	11110	1E
31	11111	1F

	Binaire	Hexa
32	100000	20
33	100001	21
34	100010	22
35	100011	23
36	100100	24
37	100101	25
38	100110	26
39	100111	27
40	101000	28
41	101001	29
42	101010	2A
43	101011	2B
44	101100	2C
45	101101	2D
46	101110	2E
47	101111	2F

	Binaire	Hexa
48	110000	30
49	110001	31
50	110010	32
51	110011	33
52	110100	34
53	110101	35
54	110110	36
55	110111	37
56	111000	38
57	111001	39
58	111010	3A
59	111011	3B
60	111100	3C
61	111101	3D
62	111110	3E
63	111111	3F

2. Les conversions

a. Du binaire ou de l'hexadécimale vers le décimal

Il suffit simplement d'utiliser la définition et d'additionner !

b. Du décimal vers le binaire ou l'hexadécimale. Méthode 1.

Par soustractions successives : en cherchant à chaque fois quelle est la plus grande puissance de 2 pour le binaire, ou de 16 pour l'hexadécimal, inférieur au résultat.

Exemple : Comment écrire 7 777 en base 16 ?

Calcul des premières puissances de 16 : $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256$, $16^3 = 4\,096$, $16^4 = 65\,536$

La plus grande puissance de 16 dans 7 777 est 4 096, on peut la retirer 1 fois : $7\,777 - 1 \times 4\,096 = 3\,681$.

La plus grande puissance de 16 dans 3 681 est 256, on peut la retirer 14 fois : $3\,681 - 14 \times 256 = 97$.

La plus grande puissance de 16 dans 97 est 16, on peut la retirer 6 fois : $97 - 6 \times 16 = 1$.

On a donc : $7\,777 = 1 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 6 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 1E61_{b16}$.

c. Du décimal vers le binaire ou l'hexadécimale. Méthode 2.

Par divisions euclidiennes successives, en divisant à chaque fois le résultat par 2 pour le binaire, ou par 16 pour l'hexadécimal, puis en remontant tous les restes obtenus

Exemple : Comment écrire 92 en base 2 ?

$$92 = 2 \times 46 + 0$$

$$46 = 2 \times 23 + 0$$

$$23 = 2 \times 11 + 1$$

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

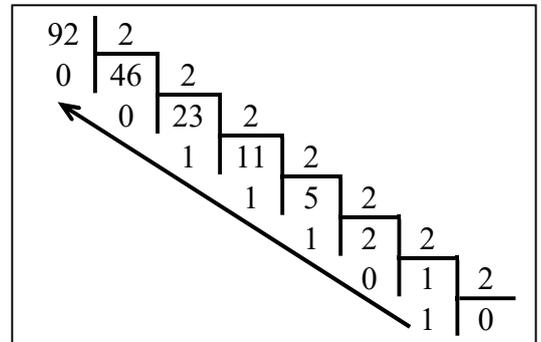
$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

$$\text{Donc : } 92 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1 + 0) + 1) + 1) + 1) + 0) + 0$$

$$92 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 1011100_{b2}$$



d. Du binaire vers l'hexadécimale et réciproquement

Il suffit de connaître la correspondance binaire ↔ hexadécimale des 16 premiers entiers et de regrouper les chiffres en binaire 4 par 4 :

Exemples : $1E61_{b16} = 0001\ 1110\ 0110\ 0001_{b2} = 1111001100001_{b2}$.

$$1011100_{b2} = 0101\ 1100_{b2} = 5C_{b16}$$

3. Les opérations

a. Addition et soustraction

On procède comme d'habitude de la droite vers la gauche sans oublier les retenues éventuelles.

Le plus simple étant d'écrire la table d'addition dans la base considérée.

Exemples : $111010_{b2} + 110011_{b2} = 1101101_{b2}$ ($58 + 51 = 109$)

$$111010_{b2} - 110011_{b2} = 111_{b2}$$
 ($58 - 51 = 7$)

Remarque : Les nombres négatifs seront vus plus tard...

$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ + 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ + 0\ 1\ 0 \\ - 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array}$
---	--

b. Multiplication et division

On les pose comme d'habitude, mais certaines de ces opérations sont très simples :

Multiplication par 10 en décimal ou multiplication par 2 en binaire : On ajoute un 0 à droite.

Division entière par 10 en décimal ou division par 2 en binaire : On retire le dernier chiffre à droite.

Exemple : $1011_{b2} \times 101_{b2} = 110111_{b2}$ ($11 \times 5 = 55$)

101100_{b2} divisé par 11_{b2} donne 1110_{b2} reste 10_{b2}

Remarque : Les nombres à virgule seront vus plus tard...

$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ \times 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array}$
---	--	---