

# Chap 3. Booléens

Livre p 275 – Chap 22 Circuits et logique booléenne

## 1. Algèbre de Boole

### a. Définition

Un booléen est une variable qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 (Faux, False) ou 1 (Vrai, True)  
L'algèbre de Boole fut inventé par le mathématicien britannique George Boole (1815 – 1864).

### b. Table de vérité

Une table de vérité est un tableau représentant toutes les combinaisons de valeurs possibles pour une ou plusieurs variables, et la valeur associée pour une fonction donnée.

### c. Négation

L'opérateur « NOT » (Non) se note en plaçant un trait au-dessus de l'expression booléenne.

Remarque : On peut aussi écrire : « not( $a$ ) », « non( $a$ ) », «  $\neg a$  » ou «  $!a$  ».

$a$	$\bar{a}$
0	1
1	0

### d. Conjonction

L'opérateur « AND » (Et) se note comme une multiplication, par un point entre deux expressions booléennes.

Remarque : On peut aussi écrire : «  $a$  and  $b$  », «  $a$  et  $b$  », «  $a \& b$  » ou «  $a \wedge b$  ».

$a$	$b$	$a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### e. Disjonction

L'opérateur « OR » (Ou) se note comme une addition, par un + entre deux expressions booléennes.

Remarque : On peut aussi écrire : «  $a$  or  $b$  », «  $a$  ou  $b$  », «  $a|b$  » ou «  $a \vee b$  ».

Attention : Tout comme la multiplication est prioritaire sur l'addition, l'opérateur « AND » est prioritaire sur l'opérateur « OR » mais il vaut mieux utiliser des parenthèses :  $a + b.c = a + (b.c)$

$a$	$b$	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### f. Autres opérateurs

Il existe d'autres opérateurs :

- L'opérateur « NAND » (Non–Et) :  $\overline{a.b}$
- L'opérateur « NOR » (Non–Ou) :  $\overline{a+b}$
- L'opérateur « XOR » (Ou exclusif) :  $a \oplus b$

$a$	$b$	$\overline{a.b}$	$\overline{a+b}$	$a \oplus b$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

## 2. Propriétés

### a. Éléments neutres

0 est l'élément neutre de l'opérateur « OR » : Pour tout  $a$ ,

$$0 + a = a + 0 = a$$

1 est l'élément neutre de l'opérateur « AND » : Pour tout  $a$ ,

$$1.a = a.1 = a$$

### b. Éléments absorbants

1 est l'élément absorbant de l'opérateur « OR » : Pour tout  $a$ ,

$$1 + a = a + 1 = 1$$

0 est l'élément absorbant de l'opérateur « AND » : Pour tout  $a$ ,

$$0.a = a.0 = 0$$

### c. Idempotence

Pour tout  $a$ ,  $a + a = a$  et  $a.a = a$   
et plus généralement,  $a + a + \dots + a = a$  et  $a.a. \dots .a = a$

### d. Complémentarité

Pour tout  $a$ ,  $\overline{(\bar{a})} = a$  et  $a + \bar{a} = 1$  et  $a . \bar{a} = 0$

### e. Commutativité

Pour tout  $a$  et  $b$ ,  $a + b = b + a$  et  $a.b = b.a$

### f. Associativité

Pour tout  $a, b$  et  $c$ ,  $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$  et  $a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$

### g. Distributivité

Pour tout  $a, b$  et  $c$ ,  $a.(b + c) = a.b + a.c$  et  $(a + b).c = a.c + b.c$   
et plus surprenant...  $a + b.c = (a + b).(a + c)$  et  $a.b + c = (a + c).(b + c)$

### h. Théorème de Morgan

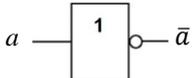
- 1<sup>ère</sup> loi de Morgan : Pour tout  $a$  et  $b$ ,  $\overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$
- 2<sup>ème</sup> loi de Morgan : Pour tout  $a$  et  $b$ ,  $\overline{a . b} = \bar{a} + \bar{b}$

## 3. Portes logiques

### a) Électronique

Les opérations réalisées dans un ordinateur sont réalisées à l'aide de portes logiques.

### b) Opérateur « NOT »

Notation européenne : 

Notation américaine : 

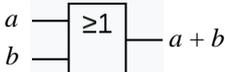
### c) Opérateur « AND »

Notation européenne : 

Notation américaine : 

Remarque : Du fait de l'associativité de l'opérateur AND, on peut avoir plus de deux entrées

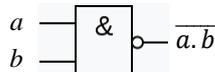
### d) Opérateur « OR »

Notation européenne : 

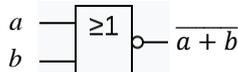
Notation américaine : 

Remarque : Du fait de l'associativité de l'opérateur OR, on peut avoir plus de deux entrées

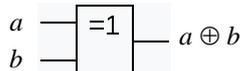
### e) Autres opérateurs

NAND : Notation européenne : 

Notation américaine : 

NOR : Notation européenne : 

Notation américaine : 

XOR : Notation européenne : 

Notation américaine : 