Chap 2. ***Limites de fonctions***

Livre p 187 – Chap 6. Limites de fonctions

1. Limite d'une fonction à l'infini

a. Limite infinie

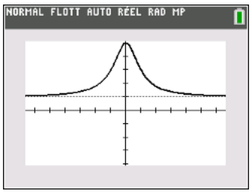
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  (Définition avec quantificateurs logiques : $\forall A > 0, \exists a > 0, x > a \Rightarrow f(x) > A$)
  Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Remarque : Contrairement aux suites numériques, on peut aussi faire tendre x vers $-\infty$.
  Notations : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b. Limite finie

Soit l un réel.

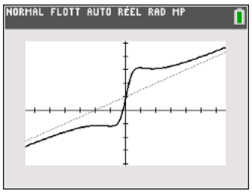
- On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  (Définition avec quantificateurs logiques : $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, x > a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$)
  Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
- Remarque : Contrairement aux suites numériques, on peut aussi faire tendre x vers $-\infty$.
  Notations : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

c. Asymptote horizontale



Lorsqu'une fonction admet une limite finie b quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), on dit alors que la courbe (C_f) admet la droite (Δ) d'équation $y = b$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

d. Asymptote oblique (Hors Programme)



Si on peut écrire : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$) on dit alors que la courbe (C_f) admet la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

e. Fonctions de références

- En $+\infty$:
  Limites infinies :
  $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, …, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$, et $x \mapsto e^x$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
  Limites finies :
  $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1/x^2$, …, $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $x \mapsto 1/\sqrt{x}$, $x \mapsto e^{-x}$, tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- En $-\infty$:
  Limites infinies :
  $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$ et n impair), tendent vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.
  $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$ et n pair), tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.
  Limites finies :
  $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1/x^2$, …, $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $x \mapsto e^x$, tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

2. Limite d'une fonction en un réel

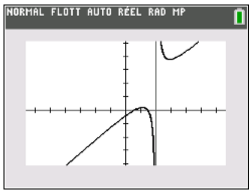
a. Limite infinie

Soit a un réel.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a
  (Définition avec quantificateurs logiques : $\forall A > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$)
  Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a
  Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

b. Limite à droite, limite à gauche

Fréquemment on doit différencier la limite à droite ($x > a$) de la limite à gauche ($x < a$) du réel a pour des raisons de signes :

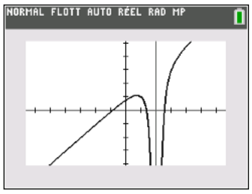


Notations : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Remarque : On dit aussi « par valeurs inférieures » ou « par valeurs supérieures »

c. Asymptote verticale

Lorsqu'une fonction admet une limite infinie quand x tend vers un réel a (à droite ou à gauche), on dit alors que la courbe (C_f) admet la droite (Δ) d'équation $x = a$ comme asymptote verticale en a.



d. Limite finie

Soit a et l deux réels.

On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a

(Définition avec quantificateurs logiques : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$)

Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

e. Fonctions de références

Limites infinies :

- $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1/x^2$, $x \mapsto 1/x^3$, $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $x \mapsto 1/\sqrt{x}$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
- $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1/x^3$, $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbf{N}$ et n impair), tendent vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures.
- $x \mapsto 1/x^2$, $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbf{N}$ et n pair), tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures.

Limites finies :

- $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}$), $x \mapsto \sqrt{x}$, tendent vers 0 quand x tend vers 0.
- $x \mapsto e^x$, tend vers 1 quand x tend vers 0.

3. Limites et opérations

a. Somme et différence

Tableau pour la somme : (Valable quand x tend vers une valeur finie ou infinie)

$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x) =$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} g(x) =$	ℓ_2	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x)+g(x) =$	$\ell_1+\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**? ? ?**	$+\infty$

Attention : « **? ? ?** » signifie qu'il faut écrire l'expression de la somme autrement pour trouver la limite…

Tableau pour l'opposé : (Valable quand x tend vers une valeur finie ou infinie)

$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x) =$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} -f(x) =$	$-\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$

Différence : $f - g = f + (-g)$.

b. Produit et quotient

Tableau pour le produit : (Valable quand x tend vers une valeur finie ou infinie)

$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x) =$	ℓ_1	ℓ_1 ($\ell_1<0$)	ℓ_1 ($\ell_1<0$)	ℓ_1 ($\ell_1>0$)	ℓ_1 ($\ell_1>0$)	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} g(x) =$	ℓ_2	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x)\times g(x) =$	$\ell_1\times\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**? ? ?**	**? ? ?**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Attention : « **? ? ?** » signifie qu'il faut écrire l'expression du produit autrement pour trouver la limite…

Tableau pour l'inverse : (Valable quand x tend vers une valeur finie ou infinie)

$\lim\limits_{x\to\cdots} f(x) =$	ℓ_1 ($\ell_1\neq 0$)	0 et $f(x)<0$	0 et $f(x)>0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\cdots} \dfrac{1}{f(x)} =$	$1/\ell_1$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

Quotient : $f / g = f \times (1/g)$.

c. Composée de fonctions

- Définition de $f \circ g$:
  Soit f une fonction définie de J dans K et g une fonction définie de I dans J.
  On note $f \circ g$ la fonction composée de f par g, définie de I dans K par : $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
  $$\mathrm{I} \to \mathrm{J} \to \mathrm{K}$$
  $$x \mapsto g(x) \mapsto f[g(x)]$$
- Propriété sur les limites :
  Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ alors : $\lim\limits_{x\to a} : (f \circ g)(x) = c$.
  Remarque : a, b et c peuvent ici représenter des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.

d. Comment lever une indétermination ?

Factoriser : le terme de plus haut degré pour une limite à l'infini
Le terme de plus bas degré pour une limite en zéro

Développer, utiliser une expression conjuguée, reconnaitre un nombre dérivé (voir Chap. 4).

Utiliser un des théorèmes vus dans la partie suivante !

4. Théorèmes sur les limites

a. Théorèmes de comparaison

- Théorème de minoration :
  Si $f(x) < g(x)$ et que f tend vers $+\infty$, alors g tend vers $+\infty$.
- Théorème de majoration :
  Si $f(x) < g(x)$ et que g tend vers $-\infty$, alors f tend vers $-\infty$.

b. Théorème d'encadrement

- Théorème des gendarmes :
  Si $f(x) < g(x) < h(x)$ et que f et h tendent vers un même réel ℓ
  alors g tend vers ℓ.

c. Croissances comparées des fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^x$

Limite à connaitre : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

et plus généralement, pour tout entier n : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

(La fonction exponentielle l'emporte sur toutes les puissances de x)