

Chap 3. Continuité, dérivabilité et convexité

Livre p 223 – Chap 7. Compléments sur la dérivation

Livre p 253 – Chap 8. Fonctions continues

1. Continuité d'une fonction

a. Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, on dit que f est continue en a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant $f(a)$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

C'est-à-dire que : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

b. Continuité sur un intervalle

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point a de I .

c. Fonctions usuelles et opérations

On admet que toutes les fonctions usuelles vues en 1^{ère} et Term sont continues sur leur ensemble de définition (fonctions : affine, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, sinus et cosinus)

On admet également que si f et g sont deux fonctions continues, alors leur somme, opposé, différence, produit, inverse, quotient et composée sont continues sur leurs ensembles de définition.

➤ Exemple d'une fonction non continue :

La fonction « Partie entière » définie par : $E(x) = n$ où n est l'unique entier relatif tel que $n \leq x < n + 1$.

d. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

e. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : On peut remplacer $[a ; b]$ par $]a ; b[$ en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$

Application : Recherche d'une valeur approchée de la (ou des) solution(s) d'une équation.

f. Retour sur les suites récurrentes

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue et que u converge vers l , alors l est solution de l'équation : $f(x) = x$.

Démonstration du théorème du point fixe.

2. Compléments sur la dérivation

a. Rappel : Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe et est un nombre fini, on note alors $f'(a)$ sa valeur :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b. Rappel : Equation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe (C_f) représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation (T) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

c. Cas particuliers

Si la limite du taux d'accroissement en a est infinie, la fonction n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse a . (Exemple : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$)

Si la limite du taux d'accroissement en a est différente à gauche et à droite de a , la fonction n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet deux demi-tangentes différentes à gauche et à droite au point d'abscisse a . (Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$)

d. Approximation affine en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + h \times f'(a) + h \times \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

donc : pour h proche de 0, on a :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

cette expression est une approximation affine de f au voisinage de a .

e. Rappel : Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I , on note f' sa fonction dérivée qui à tout réel x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$.

f. Théorème

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I (Attention : Pas de réciproque !)

g. Rappel : Formules vues en 1^{ère}

➤ Fonctions usuelles :

$f(x)$	f définie sur	f dérivable sur	$f'(x)$
$ax + b$	\mathbf{R}	\mathbf{R}	a
x^2	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$2x$
x^3	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$3x^2$
x^n	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	\mathbf{R}^*	\mathbf{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	\mathbf{R}	\mathbf{R}	e^x

➤ Opérations :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I et k une constante, alors :

- Si $f = u + v$ f est dérivable et $f' = u' + v'$.
- Si $f = u - v$ f est dérivable et $f' = u' - v'$.
- Si $f = k \times u$ f est dérivable et $f' = k \times u'$. Attention : k est ici une constante !
- Si $f = u \times v$ f est dérivable et $f' = u' \times v + u \times v'$.
- Si $f = u^2$ f est dérivable et $f' = 2 \times u' \times u$.
- Si $f = \frac{1}{v}$ f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$.
- Si $f = \frac{u}{v}$ f est dérivable et $f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

h. Dérivée d'une composée

Rappel de 1ère : Dérivée d'une composée affine, avec a et b deux constantes.

Si g est dérivable et que $f(x) = g(ax + b)$ alors f est dérivable et $f'(x) = a \times g'(ax + b)$

Application : Avec a et b deux constantes

- | | |
|--|--------------------------------------|
| • Si $f(x) = (ax + b)^2$, f est dérivable et | $f'(x) = 2a(ax + b)$. |
| • Si $f(x) = (ax + b)^3$, f est dérivable et | $f'(x) = 3a(ax + b)^2$. |
| • Si $f(x) = (ax + b)^n$, f est dérivable et | $f'(x) = na(ax + b)^{n-1}$. |
| • Si $f(x) = \frac{1}{ax + b}$, f est dérivable et | $f'(x) = \frac{-a}{(ax + b)^2}$. |
| • Si $f(x) = \sqrt{ax + b}$ et que $ax + b > 0$, f est dérivable et | $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$. |
| • Si $f(x) = e^{ax + b}$, f est dérivable et | $f'(x) = a e^{ax + b}$. |

Plus généralement :

Si u et g sont dérivables et que $f = g \circ u$, alors f est dérivable et $f' = u' \times (g' \circ u)$

C'est-à-dire que si $f(x) = g[u(x)]$ alors $f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$

Application : Avec u une fonction dérivable

- | | |
|--|---|
| • Si $f(x) = [u(x)]^2$, f est dérivable et | $f'(x) = 2 u'(x) \times u(x)$. |
| • Si $f(x) = [u(x)]^3$, f est dérivable et | $f'(x) = 3 u'(x) \times [u(x)]^2$. |
| • Si $f(x) = [u(x)]^n$, f est dérivable et | $f'(x) = n u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$. |
| • Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$, et que $u(x) > 0$, f est dérivable et | $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. |
| • Si $f(x) = e^{u(x)}$, f est dérivable et | $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$. |

3. Convexité d'une fonction

a. Dérivée seconde et suivantes

Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable sur I , on note f'' sa fonction dérivée, appelée fonction dérivée seconde de f sur I .

On définit ainsi par récurrence la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f , notée $f^{(n)} : f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

b. Caractérisation des fonctions convexes

Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si et seulement si :

Pour tout intervalle $[a ; b]$, la courbe (C_f) est en-dessous de la corde $[AB]$ où : $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$.

Ce qui équivaut à :

- Si f est dérivable, la courbe (C_f) est au-dessus de toutes ses tangentes sur I .

- Si f est dérivable, f' est croissante sur I .

- Si f est deux fois dérivable, f'' est positive sur I .

c. Caractérisation des fonctions concaves

Une fonction f est dite concave sur un intervalle I si et seulement si :

Pour tout intervalle $[a ; b]$, la courbe (C_f) est au-dessus de la corde $[AB]$ où : $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$.

Ce qui équivaut à :

- Si f est dérivable, la courbe (C_f) est en-dessous de toutes ses tangentes sur I .

- Si f est dérivable, f' est décroissante sur I .

- Si f est deux fois dérivable, f'' est négative sur I .

d. Inégalités de convexité

Si f est convexe sur I , alors pour tout a et b de I , on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Si f est concave sur I , alors pour tout a et b de I , on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

e. Point d'inflexion d'une courbe

Soit f une fonction, (C_f) sa courbe représentative et A un point de (C_f) .

On dit que A est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si la fonction change de convexité en A .

C'est-à-dire que :

- La courbe (C_f) traverse sa tangente en A .

- Si f est deux fois dérivable, alors f'' change de signe en A .