Chap 5. Géométrie vectorielle dans l'espace

Livre p 55 – Chap 2. Géométrie vectorielle dans l'espace
Livre p 119 – Chap 4. Représentations paramétriques et équations cartésiennes (1ère partie)

1. Vecteurs dans l'espace

a. Définition

Un vecteur $\vec{u}$ non nul est caractérisé par :

- Sa direction : portée par une droite.
- Son sens : matérialisé par une flèche.
- Sa norme : une longueur, notée $||\vec{u}||$

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ n'a ni direction ni sens mais une norme égale à 0.

Un vecteur peut être défini par un couple de points (A ; B), on le note alors : $\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Le couple (A ; A) représente le vecteur nul.

Attention : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est pas lié aux points A et B, il a juste :

- La même direction que la droite (AB).
- Le même sens que de A vers B.
- La même norme que la longueur AB.

b. Egalités et translation

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si : ils ont même direction, même sens et même norme ou s'ils sont tous les deux nuls.

Soient A, B, C, D quatre points non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si : ABDC est un parallélogramme.

Si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on dit que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

c. Somme de vecteurs

Soient A, B et C trois point tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On définit alors pour leur somme, le vecteur : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ tel que :

$\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, où D est l'unique point tel que ABDC soit un parallélogramme (éventuellement aplati).

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

d. Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul :

On définit alors le produit de $\vec{u}$ par k comme étant le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ ayant :

- Même direction que $\vec{u}$
- Même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et le sens contraire si $k < 0$
- Une norme égale à $|k| \times ||\vec{u}||$

Remarque : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, alors $\vec{v} = k\vec{u} = \vec{0}$.

Propriétés : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
$(k + k')\,\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
$(kk')\,\vec{u} = k(k'\vec{u})$

e. Combinaison linéaire de vecteurs

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots \overrightarrow{u_n}$, tout vecteur $\vec{v}$ pouvant s'écrire :
$\vec{v} = k_1\,\overrightarrow{u_1} + k_2\,\overrightarrow{u_2} + \dots + k_n\,\overrightarrow{u_n}$, où $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont des réels.

2. Droites et plans de l'espace

a. Vecteurs colinéaires, points alignés

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit colinéaires si l'on peut écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire non triviale de ces deux vecteurs : c'est à dire qu'il existe un couple (k_1 ; k_2) différent de (0 ; 0) tel que : $k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v} = \vec{0}$.

Remarque : Plus simplement, soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, alors $\vec{v}$ est colinéaire avec $\vec{u}$ s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Propriété :

Trois points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

b. Droite de l'espace

Soient A et B deux points distincts de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB).
Une droite de l'espace est donc définie par un point et un vecteur directeur.

c. Vecteurs coplanaires, points coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dit coplanaires si l'on peut écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire non triviale de ces trois vecteurs : c'est à dire qu'il existe un triplet (k_1 ; k_2 ; k_3) différent de (0 ; 0 ; 0) tel que : $k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v} + k_3 \vec{w} = \vec{0}$.

Remarque : Plus simplement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, alors $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{w}$ peut être écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire s'il existe deux réel λ et μ tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Propriété :

Quatre points A, B, C, D de l'espace sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

d. Plan de l'espace

Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe eux réel k_1 et k_2 tels que : $\overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}$.

Remarque : Le couple de vecteurs ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est appelé base du plan (ABC).
Un plan de l'espace est donc défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

3. Positions relatives de droites et plans

a. Position relative de deux droites

Soient A et B deux points, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On note (D) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, (D') la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : (D) et (D') sont parallèles

de plus, si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) alors : (D) et (D') sont confondues
si $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) alors : (D) sont (D') sont strictement parallèles

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors : (D) et (D') ne sont pas parallèles

de plus, si $\overrightarrow{AB}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors : (D) et (D') sont sécantes en un point
si $\overrightarrow{AB}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors : (D) et (D') sont non coplanaires
(ni sécantes, ni parallèles et aucun point commun)

b. Position relative d'une droite et d'un plan

Soient A et B deux points, $\vec{u}$ un vecteur non nul, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires.
On note (*D*) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, (*P*) le plan passant par B de base $(\vec{v}, \vec{w})$.

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires alors : (*D*) et (*P*) sont parallèles

de plus, si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est coplanaire avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ alors : (*D*) est incluse dans (*P*)
si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ alors : (*D*) et (*P*) sont strictement parallèles

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors : (*D*) et (*P*) sont sécants en un point

c. Position relative de deux plans

Soient A et B deux points, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ deux vecteurs non colinéaires, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs non colinéaires.
On note (P_1) le plan passant par A de base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$, ($P_2$) le plan passant par B de base $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2})$.

- Si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}$ sont coplanaires et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ sont coplanaires alors : (P_1) et (P_2) sont parallèles

de plus, si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}$ (ou avec $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2}$) alors : ($P_1$) et ($P_2$) sont confondus
si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}$ alors : (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles

- Si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}$ ne sont pas coplanaires ou si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ne sont pas coplanaires alors : (P_1) et (P_2) sont sécants en une droite.

4. Repérage dans l'espace

a. Base et repère de l'espace

Trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ non coplanaires forment une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace
Un point O et une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace forment un repère $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace

b. Coordonnées d'un vecteur et d'un point

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tel que : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
  $(x ; y ; z)$ forment les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- Pour tout point M de l'espace muni repère $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tel que : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
  $(x ; y ; z)$ forment les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Remarque : *x* est l'abscisse, *y* est l'ordonnée, *z* est la cote.

c. Propriétés

Soient $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ deux vecteurs dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

- Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors : $\vec{w}(x + x' ; y + y' ; z + z')$ dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- Si $\vec{w} = k\vec{u}$ alors : $\vec{w}(kx ; ky ; kz)$ dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A} ; y_\mathrm{A} ; z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B} ; y_\mathrm{B} ; z_\mathrm{B})$ deux points dans un repère $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} ; y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} ; z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$
- Si I est le milieu de [AB], alors $\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B}}{2} ; \frac{y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B}}{2} ; \frac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}\right)$
- Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors $\mathrm{G}\left(\frac{x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B} + x_\mathrm{C}}{3} ; \frac{y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B} + y_\mathrm{C}}{3} ; \frac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B} + z_\mathrm{C}}{3}\right)$

d. Système d'équations paramétriques d'une droite de l'espace

Soient A(x_A ; y_A ; z_A) un point et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur de l'espace, la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace pour lesquels il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$

Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ est alors appelé système d'équations paramétriques de la droite (D)

Attention : Cette écriture n'est pas unique…

Remarque : Il n'y a pas de façon plus simple de caractériser une droite de l'espace !

e. Système d'équations paramétriques d'un plan de l'espace

Soient A(x_A ; y_A ; z_A) un point, $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $\vec{v}(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace, le plan (P) passant par A et de base $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace pour lesquels il existe deux réel t et t' tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases}$

Le système : $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$, $(t, t') \in \mathbf{R}^2$ est alors appelé système d'équations paramétriques du plan (P)

Attention : Cette écriture n'est pas unique…

Remarque : On verra une façon plus simple de caractériser un plan de l'espace dans un autre chapitre…

5. Intersection de plans (Hors Programme)

a. Théorème d'incidence

Soient (P) et (P') deux plans parallèles, et (Q) un troisième plan.

- Si (Q) est parallèle à (P) alors (Q) est parallèle à (P')
- Si (Q) est sécant avec (P) suivant une droite (D) alors (Q) est sécant avec (P') suivant une droite (D') parallèle à (D)

b. Théorème du toit

Soient (P) et (P') deux plans sécants suivant une droite (Δ), et (Q) un troisième plan, non parallèle à (P) ou à (P'), on note (D) l'intersection de (Q) et (P), on note (D') l'intersection de (Q) et (P')

- Si (Q) est parallèle à (Δ) alors (D) et (D') sont parallèles à (Δ)
- Si (Q) est sécant avec (Δ) en un point A alors (D) et (D') sont sécantes en A