Chap 6. Fonction logarithme népérien

Livre p 283 – Chap 9. Fonction logarithme népérien

1. Définition et propriétés

a. Retour sur la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement monotone sur **R**,
de plus $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc elle établit une bijection de **R** dans $]0 ; +\infty[$.
C'est-à-dire que tout élément de **R** a une image et une seule par la fonction exp dans $]0 ; +\infty[$, et tout élément de $]0 ; +\infty[$ a un antécédent et un seul par la fonction exp dans **R**.

b. Définition de la fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle étant bijective de **R** dans $]0 ; +\infty[$, elle admet une fonction réciproque, bijective de $]0 ; +\infty[$ dans **R**, on l'appelle logarithme népérien et on la note ln.

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, si $y = e^x$, alors $x = \ln(y)$

Pour tout $x\in]0 ; +\infty[$, si $y = \ln(x)$, alors $x = e^y$.

c. Relation fonctionnelle

Pour tous $x\in]0 ; +\infty[$ et $y\in]0 ; +\infty[$, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
Dém. : On sait que pour tous $X\in\mathbf{R}$ et $Y\in\mathbf{R}$, on a : $e^{X+Y} = e^X \times e^Y$, on pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$…

d. Propriétés

Bijections réciproques :

Pour tout $x\in]0 ; +\infty[$: $e^{\ln(x)} = x$

Pour tout $x\in\mathbf{R}$: $\ln(e^x) = x$

Valeurs particulières :

$e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$

$e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$

Pour tous $x\in]0 ; +\infty[$ et $y\in]0 ; +\infty[$, on a :

$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

$\ln(x^2) = 2 \ln(x)$

et par récurrence, $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

$\ln(1/x) = -\ln(x)$

$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

2. Etude de la fonction ln

a. Fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x)$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Dém. : Soit $g(x) = e^x$ et $h = g \circ f$, alors $f' \times (g' \circ f) = 1$ or $g' = g$, donc $f' \times h = 1$.

b. Limites

On a : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc : $\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$.
On a : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

c. Tableau de variations

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[, par $f(x) = \ln(x)$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$f'(x) > 0$ sur]0 ; +∞[, donc f est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

d. Courbe

Les courbes des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.
L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe en 0.
Tangentes en $x = 1$ et en $x = e$…

e. Convexité

La fonction logarithme népérien est concave sur]0 ; +∞[.
Application : $\ln(x) \leq x - 1$ sur]0 ; +∞[.

3. Compléments

a. Equations et inéquations

La fonction logarithme établit une bijection de]0 ; +∞[dans **R** donc :

Pour tous $a \in]0 ; +\infty[$ et $b \in]0 ; +\infty[$, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à : $a = b$.

La fonction logarithme est strictement croissante sur]0 ; +∞[, donc :

Pour tous $a \in]0 ; +\infty[$ et $b \in]0 ; +\infty[$, $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à : $a < b$.

Application : Etude des suites géométriques. (Retour sur l'exercice du village dont la population diminue)

b. Croissances comparées

- Croissances comparées à l'infini :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$. Dém. : On pose $X = \ln(x)$

- Croissances comparées en zéro :

$\lim\limits_{x \to 0} x.\ln(x) = 0$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n.\ln(x) = 0$. Dém. : On pose $X = 1/x$

c. Limite particulière

Autre limite à connaitre : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Dém : Utilisation du nombre dérivé

d. Dérivée de la composée

La fonction g définie par : $g(x) = \ln(ax + b)$ est dérivable sur son ensemble de définition, et : $g'(x) = \frac{a}{ax+b}$

La fonction g définie par : $g(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur son ensemble de définition, et : $g' = \frac{u'}{u}$

Remarques :

La fonction g définie par : $g(x) = \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et : $g'(x) = \frac{1}{x}$

La fonction g définie par : $g(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur son ensemble de définition, et : $g' = \frac{u'}{u}$

e. Dérivée logarithmique (Hors Programme)

Soit f une fonction ne s'annulant pas, on appelle dérivée logarithmique de f, la fonction : $\frac{f'}{f}$

Propriétés :

la dérivée logarithmique de $u \times v$ est : $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$
la dérivée logarithmique de $\frac{1}{u}$ est : $-\frac{u'}{u}$
la dérivée logarithmique de $\frac{u}{v}$ est : $\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$
la dérivée logarithmique de u^2 est : $2\,\frac{u'}{u}$
la dérivée logarithmique de u^n est : $n\,\frac{u'}{u}$
la dérivée logarithmique de $\sqrt{u}$ est : $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$

4. Fonctions logarithme et exponentielle de base *a* (Hors Programme)

a. Fonction logarithme de base *a*

Soit a un réel strictement positif différent de 1.
On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée log_a définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Propriétés : $log_a = k \times \ln$
$log_a(a) = 1$

Cas particuliers : Si $a = e$, on retrouve le logarithme népérien
Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal, noté plus simplement *log*.

b. Fonction exponentielle de base *a*

Soit a un réel strictement positif différent de 1.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction notée exp_a réciproque de la fonction logarithme de base a.
Notation : Pour tout réel x, on note $exp_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$.

c. Applications du logarithme décimal

En Physique : Les décibels
En Chimie : Le pH
En Economie : Le papier semi-logarithmique
En Mathématiques : La règle à calcul