Chap 12. Sommes de variables aléatoires

Livre p 431 – Chap 14. Sommes de variables aléatoires

1. Modéliser à l'aide d'une somme de variables aléatoires

a. Loi de couple

Définitions

- Pour deux variables aléatoires X et Y, la **loi du couple $(X\,;\,Y)$** est définie, pour tous nombres réels k et ℓ, par $\mathbf{P}(X = k\,;\,Y = \ell) = \mathbf{P}(\{X = k\} \cap \{Y = \ell\})$.
- Deux variables aléatoires **X et Y sont indépendantes** si, pour tous nombres réels k et ℓ, les évènements $\{X = k\}$ et $\{Y = \ell\}$ sont indépendants.

Propriétés

- Pour toutes variables aléatoires X et Y **indépendantes**, et pour tous nombres réels k et ℓ, $\mathbf{P}(X = k\,;\,Y = \ell) = \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = \ell)$.
- On peut alors établir la **loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$** : pour tout nombre réel s, $\mathrm{P}(X + Y = s)$ est la somme des probabilités $\mathrm{P}(X = k\,;\,Y = \ell)$ où les nombres réels k et ℓ vérifient $k + \ell = s$:

$$\mathbf{P}(X + Y = s) = \sum_{k+\ell=s} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = \ell).$$

Démo : 14 p. 443

b. Application à la loi binomiale

Définition Un **échantillon de taille n** ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une loi de probabilité est une **liste de n variables aléatoires indépendantes** suivant cette loi.

Propriété (admise)

Si $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ est un échantillon de taille $n \geqslant 2$ de la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$, alors la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} B_k = B_1 + \ldots + B_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** telles que X_1 suit la loi binomiale de paramètres m et p, et X_2 suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $m + n$ et p.

Démo : 15 p. 443

2. Calculer des indicateurs d'une combinaison linéaire de variables aléatoires

a. Somme et indicateurs

Propriété

Pour toutes variables aléatoires X et Y, et pour tout nombre réel b :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X+b) = E(X) + b$.

Démo p. 442

Propriété

Pour toutes variables aléatoires X et Y **indépendantes**, et pour tout nombre réel b :

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$;
- $V(X+b) = V(X)$.

Démo : 18 p. 443

b. Application à la loi binomiale

Propriété

Si la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0 ; 1]$, alors :

- $E(X) = np$;
- $V(X) = np(1-p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démo : 13 p. 443

c. Produit par un nombre réel et indicateurs

Propriété

Pour toute variable aléatoire X et pour tout nombre réel a :

- $E(aX) = aE(X)$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Démo : p. 442 et 16 p. 443