Chap 13. Concentration, loi des grands nombres

Livre p 461 – Chap 15. Concentration, loi des grands nombres

1. Exploiter une moyenne d'échantillon

Définition

Pour un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille n d'une loi de probabilité donnée, **la variable aléatoire moyenne de l'échantillon** est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n).$$

Propriétés

Pour tout échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi d'une variable aléatoire X dont la moyenne est M_n, on a :

- $E(M_n) = E(X)$;
- $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$;
- $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$.

Démo : 59 p. 479

2. Exploiter des inégalités probabilistes

a. Inégalités

Propriétés

Pour toute variable aléatoire X et pour tout nombre réel δ :

- **inégalité de Markov** (pour X à valeurs positives) : $P(X \geqslant \delta) \leqslant \frac{E(X)}{\delta}$;
- **inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : $P\left(|X - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Démo : 60 et 61 p. 479

b. Loi des grands nombres

Propriétés

Pour toute variable aléatoire X associée à un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille n et de moyenne M_n, et pour tout nombre réel $\delta > 0$:

- **inégalité de concentration** : $P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$;
- **loi des grands nombres** : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) = 0$.

Démo : 62 et 63 p. 479