Mercredi 20 mai 2015 $1°S_3$

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(9 points)*

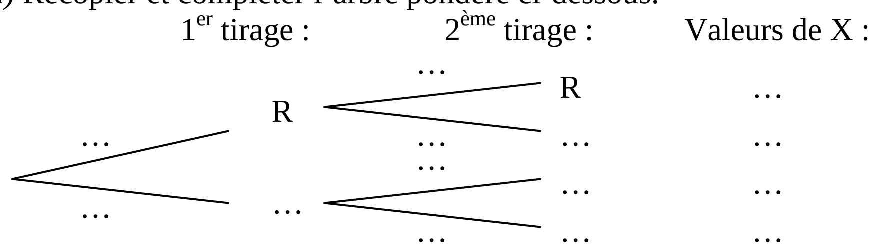
Partie 1

Dans cette partie on place 6 jetons dans une urne : un rouge et les autres blancs.
On choisit au hasard un jeton dans l'urne.
R est l'évènement « le jeton tiré est rouge » et B l'évènement « le jeton tiré est blanc ».
On note p la probabilité associée à cette expérience.

1°) Déterminer p(R) et p(B).

2°) On choisit maintenant successivement deux jetons dans l'urne, avec une remise entre les deux tirages, et on définit le jeu suivant :
On gagne 16 points si l'on obtient deux fois le jeton rouge, on gagne 1 point si l'on obtient deux fois un jeton blanc, et on perd 5 points sinon.
X est la variable aléatoire correspondant au gain.

a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Déterminer la loi de probabilité de X. (indiquer tous les calculs)
c) Calculer l'espérance E(X).
d) Le jeu est-il équitable ?

Partie 2

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 4.
Dans une urne, on place n jetons : un rouge et les autres blancs.
On choisit au hasard un jeton dans l'urne.
R est l'évènement « le jeton tiré est rouge » et B l'évènement « le jeton tiré est blanc ».
On note p' la probabilité associée à cette expérience.

1°) Exprimer p'(R) et p'(B) en fonction de n.

2°) On choisit maintenant successivement deux jetons dans l'urne, avec une remise entre les deux tirages, et on définit le jeu suivant (comme dans la partie 1) :
On gagne 16 points si l'on obtient deux fois le jeton rouge, on gagne 1 point si l'on obtient deux fois un jeton blanc, et on perd 5 points sinon.
Y est la variable aléatoire correspondant au gain.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
b) Déterminer, en fonction de n, la loi de probabilité de Y. (indiquer tous les calculs)
c) Montrer que l'espérance de Y est : $E(Y) = \dfrac{n^2 - 12n + 27}{n^2}$
d) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles le jeu est équitable ?
e) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?

…/…

NOM & Prénom : ……………………………………………………

Exercice 2 *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative.

1°) Déterminer la fonction dérivée de f.

2°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

3°) Déterminer, s'ils existent, le minimum et le maximum de f sur **R**.

4°) Etudier la position de (C_f) par rapport à la droite (d) d'équation : $y = 4$.

5°) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.

6°) Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormal.
(on fera apparaître les différents résultats obtenus précédemment)

Exercice 3 *(4 points)*

Soit la suite définie sur **N** par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2+5}{4}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1°) En fin de sujet a été tracé la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+5}{4}$.

Placer, sans aucun calcul et sans justifier, les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses.
Laisser apparent les traits de constructions et ne pas oublier de rendre le sujet avec la copie !

2°) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

3°) Démontrer que u est croissante.

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le rang n à partir duquel :

a) $u_n > 10^2$.

b) $u_n > 10^{12}$.