Jeudi 18 septembre 2014 Term S

Devoir de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15% du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10% du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4} a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables :	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tant que $a < 1\,100$, faire :
	Affecter à a la valeur …
	Affecter à n la valeur …
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1\,320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

<u>Exercice 2</u> *(8,5 points)*

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur **N** par :
$u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.
b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a. Calculer w_0.
b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
c. En déduire que pour tout n de **N**, $w_{n+1} = w_n + 2$.
d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de **N** : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

<u>Exercice 3</u> *(6,5 points)*

1°) Ecrire les nombres suivants sous forme algébrique :
$z_1 = 4(2 + 3i) + i(3 - i)$
$z_2 = (-7 - 2i)(3 + i)$
$z_3 = \frac{2-i}{7+3i}$

2°) Résoudre dans **C** l'équation : $1 + z = 3iz + 8 - i$.

3°) On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Montrer que $j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

b) **En déduire** que $\frac{1}{j} = -1 - j$ et que $j^3 = 1$.