Jeudi 16 octobre 2014 Term S

# *Devoir de Mathématiques (1h50)*

*(Calculatrice autorisée)*

## ***Exercice 1*** *(7,5 points)*

On considère le polynôme à variable complexe $P$ défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

**1°)** Démontrer que : $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

**2°)** Calculer $P(i\sqrt{3})$. En déduire deux racines de $P$.
Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout complexe $z$ : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$.

**3°)** Résoudre dans **C** l'équation : $P(z) = 0$.

**4°)** Dans le plan complexe rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et
$z_D = \bar{z}_C$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle de centre $\Omega$ d'affixe 3.

**5°)** On note E le symétrique de D par rapport à l'origine du repère.
Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$.
En déduire la nature du triangle BEC.

## ***Exercice 2*** *(3,5 points)*

À tout complexe $z$ différent de $(-1 + i)$, on associe le complexe Z défini par : $Z = \dfrac{iz+3}{z+1-i}$.
On pose : $z = x + iy$ où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$, et : $Z = X + iY$ où $X \in \mathbf{R}$ et $Y \in \mathbf{R}$.

**1°)** Déterminer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

**2°)** Démontrer que l'ensemble $(E)$ des points M d'affixe $z$ tels que $Z$ soit réel est un cercle privé d'un point, dont on déterminera le centre et le rayon.

**3°)** Déterminer l'ensemble $(F)$ des points M d'affixe $z$ tels que $Z$ soit imaginaire pur.

***Exercice 3*** *(9 points)*

La suite $(u_n)$ est définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1$.

**1°)** *a*) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.

*b*) Démontrer que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.

*c*) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**2°)** On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

*a*) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

*b*) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

En déduire une vérification de la limite obtenue dans le 1°) *c*).

*c*) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où $(x_n)$ est une suite géométrique et $(y_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

*d*) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n$.