Jeudi 13 novembre 2014 Term S

Devoir de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

On note **C** l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u},\vec{v}$). On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z)= z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme trigonométrique les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)= \lambda$, d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1 ; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

…/…

Exercice 2 *(10 points)*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ par

$u_0 = 2$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).
b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.

Entrée :	*n* et *u* sont des nombres	
Initialisation :	*n* prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher *n*	