Jeudi 12 février 2015 Term S

<u>DEVOIR de Mathématiques (1h50)</u>

(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(7 points)*

Dans un lycée, toutes les semaines, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse.
On a pu constater que :

- le technicien intervient la première semaine ;
- s'il intervient la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n + 1$ est 0,75 ;
- s'il n'intervient pas la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n + 1$ est 0,1.

On note :

- A_n l'événement « Le technicien intervient la semaine n » ;
- p_n la probabilité de cet événement

1. Quelle est la valeur de p_1 ?

2. Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ puis $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.

3. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

4. u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - \dfrac{2}{7}$.

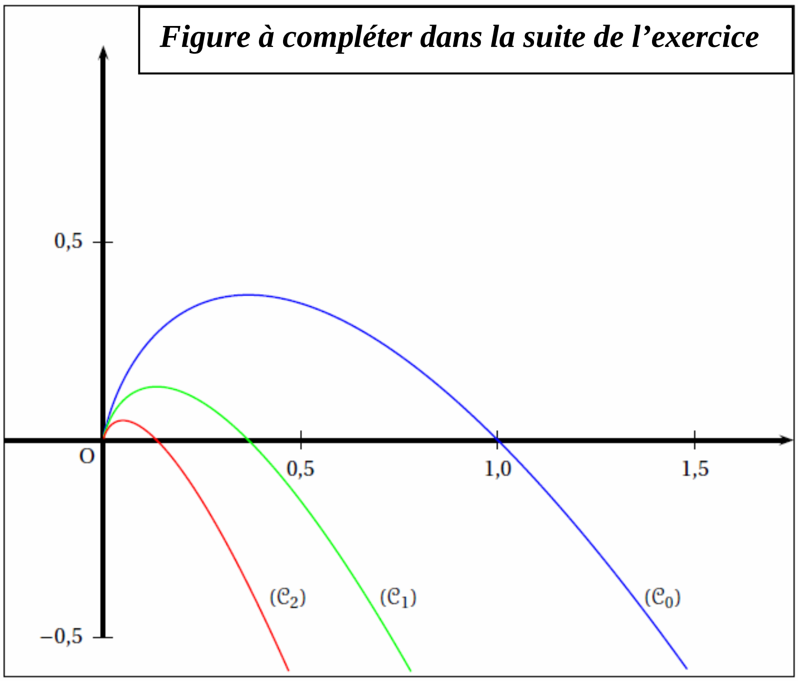
Démontrer que u est une suite géométrique et préciser sa raison.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

5. Au bout de combien de semaines la probabilité que le technicien intervienne deviendra-t-elle inférieure à 0,5 ?
Cette probabilité peut-elle être inférieure à 0,25 ? Justifier.

NOM : ………………………………

Prénom : ……………………………

Classe : ………



Exercice 2 *(13 points)*

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = -n\,x - x\ln x.$$

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Les courbes (C_0) , (C_1) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données ci-dessus.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur]0 ; +∞[par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, démontrer alors que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
En déduire la limite de f_0 en 0.

2. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\ ;+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.
1. Démontrer que pour $x\in\,]0\ ;+\infty[$, $f_n'(x) = -n-1-\ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.

2. a. Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
c. Placer sur la figure les points A_0, A_1, A_2.

3. a. Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.
b. Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
c. Placer sur la figure les points B_0, B_1, B_2.

4. a. Montrer que le coefficient directeur de la droite (A_nB_n) est indépendant de l'entier n.
b. Quelle est la nature du quadrilatère $A_0A_1B_1B_0$?
c. calculer l'aire du quadrilatère $A_0A_1B_1B_0$.

Ne pas oublier de rendre la figure complétée avec la copie !