Mardi 24 mars 2015 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(8 points)*

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\text{E}) = 0{,}02$ et $p(\text{F}) = 0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur
(rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que :
$p_n = 1 - (0{,}9)^n$.
b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

<u>Exercice 2</u> *(12 points)*

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1 + x)\, e^{-x} .$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur **R**.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur R.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur R.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)dx .$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in$ N: $I_n \geq 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur **R** par : $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$
soit une primitive de f sur **R**.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in$ **R** tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = e$.

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?