BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION avril 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ d'équation $y = 2x$.

3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. Tracer la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par : $I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

2. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a. Calculer $u'(x)$, en déduire une primitive de la fonction v définie sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

b. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine D quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (5 points)

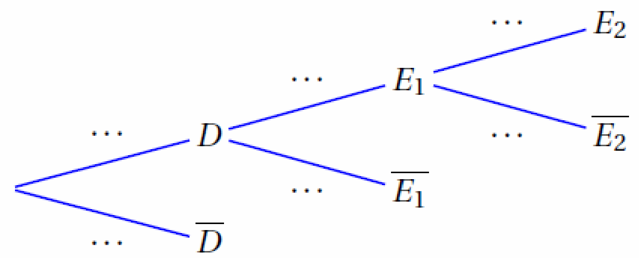
Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante.
Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés.
On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol.

Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2), dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbf{R}, \qquad (D_2) : \begin{cases} x = 0{,}5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \text{ avec } b \in \mathbf{R}.$$

1. **a.** Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).

b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S(3 ; 4 ; 0,1), un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).

b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1, \qquad v_0 = 0 \text{ et } \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}\,u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}\,v_n \end{cases}.$$

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2.

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N donné.

a. On donne l'algorithme suivant

```
Entrée :            N est un nombre entier
Variables :         K est un nombre entier
                    S est un nombre réel
                    T est un nombre réel
Initialisation :    Affecter 1 à S
                    Affecter 0 à T
                    Affecter 0 à K
Traitement :        Tant que K < N
                        Affecter √3 S − T à S
                        Affecter S + √3 T à T
                        Affecter K + 1 à K
                    Fin Tant que
Sortie :            Afficher S
                    Afficher T
```

Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous :

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + i\,v_n$.
On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + i$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\qquad z_{n+1} = a\,z_n$.

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.
On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10% des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{1-0,7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?