Mardi 6 octobre 2015 T°$S_{3\text{-}4}$

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(5 points)*

Soit P le polynôme définie sur **C** par : $P(z) = z^3 - (8 + 2i)\, z^2 + (20 + 16i)\, z - 40i$.

1°) Démontrer que P admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

2°) En déduire une factorisation de P.

3°) Résoudre $P(z) = 0$.

4°) Soient A, B, C les points d'affixe $z_A = 2i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = \overline{z_B}$ dans le plan complexe.
Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 2. *(5 points)*

Partie A

1°) Soit a un réel strictement positif, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$(1 + a)^n \geq 1 + na$.

2°) Démontrer le résultat de cours sur la limite de q^n pour $q > 1$.

Partie B

Déterminer les limites des suites suivantes :

1°) $u_n = 3^{2n} - 2^{3n}$.

2°) $v_n = \dfrac{-2n^2 + 3n + 1}{3n^3 + 5n}$.

3°) $w_n = \dfrac{2 + \cos n}{2 + n}$.

…/…

<u>Exercice 3</u>. *(10 points)*

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \qquad \text{et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :  N est un entier
             U, V, M sont des réels
             K est un entier
Début :      Affecter 0 à K
             Affecter 2 à U
             Affecter 10 à V
             Saisir N
             Tant que K < N
                 Affecter K + 1 à K
                 Affecter U à M
                 Affecter (2U + V)/3 à U
                 Affecter (M + 3V)/4 à V
             Fin tant que
             Afficher U
             Afficher V
Fin
```

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.
Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	M	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2°) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1.b. et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4°) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.