Jeudi 12 novembre 2015 T°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(12 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
où α est le réel défini dans la question 2.
b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

…/…

<u>Exercice 2.</u> *(8 points)*

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui, à tout point M de P d'affixe non nulle z, associe le point M' d'affixe :

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

1°) Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par f.

2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' = M.

3°) On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit M un point distinct des points O, A et B.

a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b) En déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{M'B}}{\mathrm{M'A}}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}$, puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{M'A}},\overrightarrow{\mathrm{M'B}})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$.

4°) Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

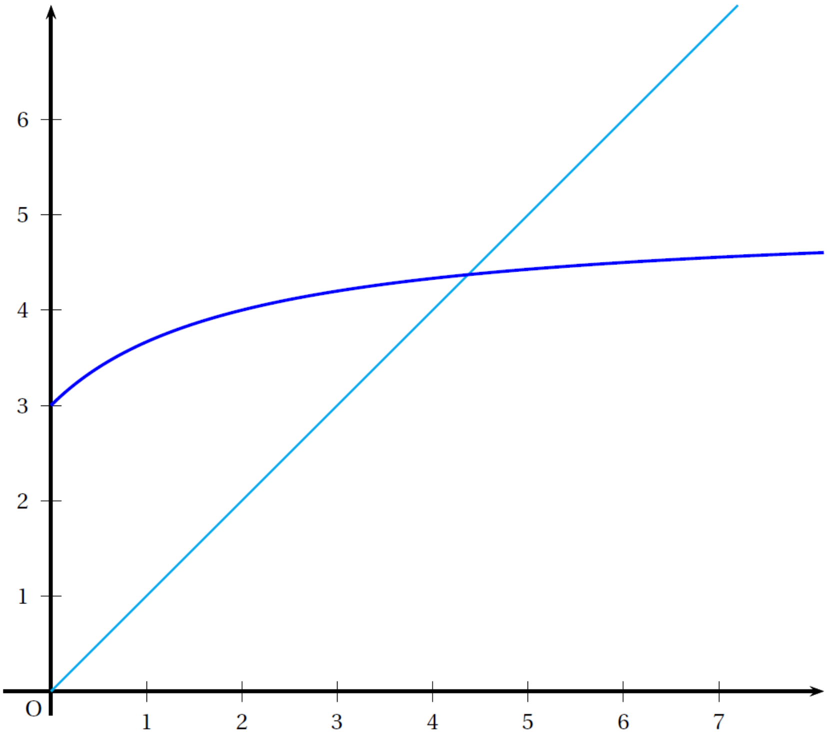
5°) Soit Γ le cercle de diamètre [AB].
Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

6°) <u>Question bonus facultative</u> *(hors barème)*
Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

NOM, Prénom et Classe : ………………………………………………………………………

T°S – Annexes à rendre avec la copie du devoir du 12/11/15

Annexe 1



Annexe 2

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que …
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur …
	Affecter à s la valeur …
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.