BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION décembre 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$

et, pour tout entier naturel $n \geq 0$ $\quad \begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$$0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

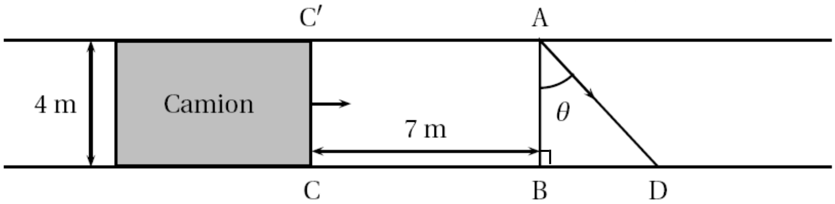
Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur.
Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.
Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.
Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à 30 km/h.

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1°) Démontrer que : $BD = \dfrac{4\sin\theta}{\cos\theta}$, puis exprimer les distances CD et AD en fonction de θ.

2°) On note t_1 et t_2 les temps (en heures) mis par le camion et le lapin pour parcourir respectivement les distances CD et AD.

Démontrer que : $t_1 = \dfrac{7}{60\,000} + \dfrac{4\sin\theta}{60\,000\cos\theta}$, puis exprimer t_2 en fonction de θ.

3°) On pose : $f(\theta) = 7 + \dfrac{4\sin\theta - 8}{\cos\theta}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

4°) **a)** Déterminer la limite de $f(\theta)$ quand θ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

b) Démontrer que $f'(\theta)$ est du même signe que $1 - 2\sin\theta$.

c) Etudier les variations de f sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que l'équation $f(\theta) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On notera θ_1 et θ_2 ces deux solutions où $\theta_1 < \theta_2$, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de θ_1 et θ_2 à 10^{-2} près (Aucun détail des calculs n'est demandé)

e) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le lapin a la vie sauve.
(On donnera un encadrement à 0,01 rad près puis à 1° près)

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. ***Question de cours***

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».
Soients M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)$.

b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
$z_{\mathrm{A}} = 4 + i$, $z_{\mathrm{B}} = 1 + i$, $z_{\mathrm{C}} = 5i$ et $z_{\mathrm{D}} = -3 - i$.
Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = (1 + 2i)\, z - 2 - 4i$.

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω (c'est-à-dire tel que $f(\Omega) = \Omega$), dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
$z' - z = -2i\,(2 - i - z)$.

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{\mathrm{MM'}}{\Omega\mathrm{M}}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}, \overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle ΩMM′ ?

d. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -1 - i\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Partie A

Soit φ la fonction définie sur **R** par :

$$\varphi(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}.$$

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I(0 ; 3) à la droite (T) : $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$, α et β étant deux réels que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) au point I(0, 3).

4. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=3$.

Que peut-on en déduire pour le point I ?

5. Construire la courbe (C) et (T), on prendra pour unité : 2 cm.

6. Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x)=\frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}.$$

On note (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Etudier la parité de g et en déduire le tracé de (C') en pointillé dans le repère précédent. Justifier.

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p).

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) *par certains nombres premiers.*

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. a. Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.