Mardi 19 janvier 2016 T°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(8 points)*

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6 ;

On note, pour tout entier naturel n non nul : G_n l'événement « le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ».

1°) Le joueur joue deux parties successives.

a) Modéliser, en justifiant, les situations rencontrées par le joueur à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Démontrer que $P(G_2) = 0{,}62$.

c) Le joueur vient de gagner la deuxième partie, quelle est la probabilité qu'il ait perdu la première ?

2°) Le joueur joue cette fois-ci n parties successives (n entier naturel non nul).
On note alors, pour tout entier naturel n non nul : $p_n = P(G_n)$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer à la calculatrice la plus petite valeur de n telle que : $\left|\frac{3}{4} - p_n\right| < 10^{-7}$.

Exercice 2. *(12 points)*

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur **R** par : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur **R** et dresser son tableau de variations.

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans **R** une solution unique α telle que :
$0{,}94 < \alpha < 0{,}941$.

4. Étudier le signe de g sur **R**.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur **R** par : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

1. Étudier le signe de f sur **R**.

2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.