Jeudi 11 février 2016 T°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(10 points)*

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle :

- E_1 l'évènement « le joueur perd la première partie » ;
- E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
- E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

1. Après avoir construit un arbre pondéré :
a. Donner les valeurs prises par X.
b. Montrer que la probabilité de l'évènement ($X = 2$) est égale à 0,031 et que celle de l'évènement ($X = 3$) est égale à 0,002.
c. Déterminer la loi de probabilité de X.
d. Calculer l'espérance de X.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n .
a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.
b. En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05\, p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel n non nul.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.
c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. *(10 points)*

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0 ; 2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.
b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de (Γ), noté P, dont on précisera les coordonnées.
c. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à (Γ) en P ?