Mardi 23 mars 2016 T°S_4

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(9 points)*

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b$.

où b est un nombre réel.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

1. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2].
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire.

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique.
On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 2] par

$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}x.$$

est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur.
Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Donner l'aire de la planche numéro k.

2. Compléter l'algorithme fourni en annexe 3 pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Exercice 2. *(3 points)*

Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x : $\frac{1}{2x^3 + 3x^2} = \frac{ax + b}{x^2} + \frac{c}{2x + 3}$

en déduire la valeur de : $I = \int_1^2 \frac{dx}{2x^3 + 3x^2}$

Exercice 3. *(8 points)*

Soit un cube ABCDEFGH. *(Figure en annexe 4)*

On place les points I, J, K tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$.

1°) Que peut-on dire des plans (BFC) et (AED).
En déduire l'intersection du plan (IJK) avec le plan (AED).
On nomme L le point d'intersection du plan (IJK) avec la droite (EH).

2°) Déterminer de même l'intersection du plan (IJK) avec le plan (EFG).
En déduire le tracé du point M, intersection du plan (IJK) avec la droite (EF).

3°) Tracer la section du cube ABCDEFGH avec le plan (IJK) sur l'annexe jointe.

4°) On se place maintenant dans le repère $\left(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

a) Indiquer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.
b) Déterminer, en justifiant, les coordonnées des points I, J, K.
c) Soient le point P(1 ; 2 ; 1), P appartient-il au plan (IJK) ?
d) Démontrer que M est le milieu de [EF].