BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION avril 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u},\vec{v})$ de l'**annexe 1**.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que : $1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a. Interpréter géométriquement d_n.
b. Calculer d_0.
c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'**annexe 1** à rendre avec la copie.
d. Justifier cette construction.

Exercice 2 (6 points)

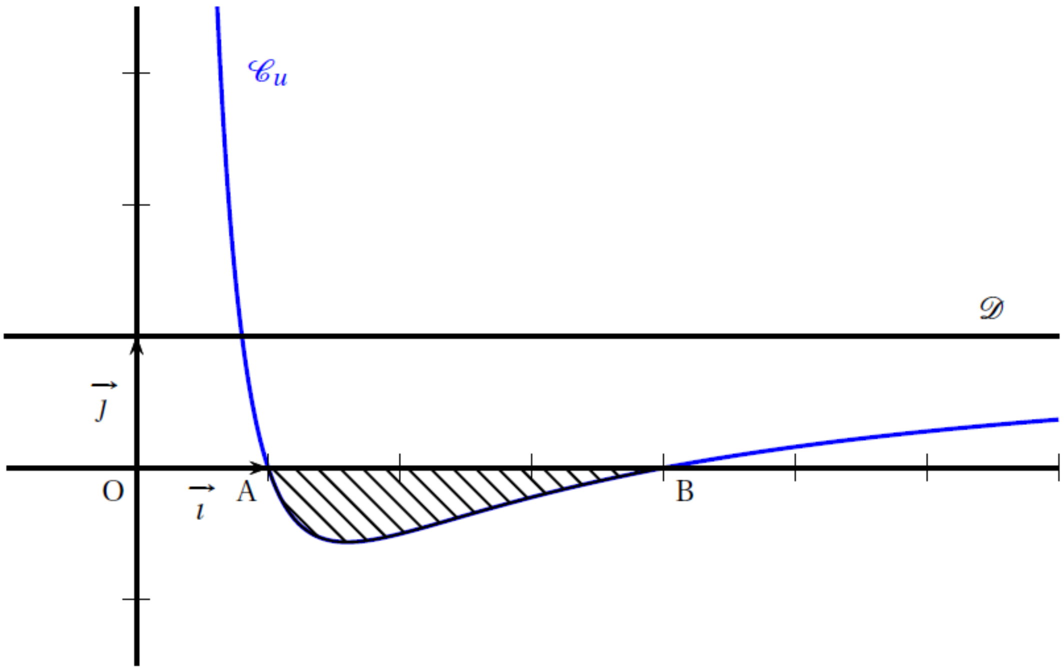
Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note A_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \text{ et } 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $A_\lambda = A$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH donné en **annexe 2** (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}.$$

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF) en expliquant la méthode utilisée.

3. Tracer en couleur la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère (A ; $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}$).

1. Donner, en justifiant, les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\ ;1\ ;\ \frac{5}{8}\right)$.

Le triangle TPN est-il rectangle en T?

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul en **annexe 3** ?
3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n + 6$.

1. a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geq 0$.
a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée :           n et u sont des nombres
Initialisation :   n prend la valeur 0
                   u prend la valeur 90
Traitement :       Tant que u ≥ 120 − u faire
                        n prend la valeur n + 1
                        u prend la valeur 0,85 × u + 6
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher n
```

a. Que fait cet algorithme ?
b. Quelle valeur affiche-t-il ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- r_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n,
- c_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n.

On a donc $r_0 = 90$ et $c_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\, U_n$.
b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. **a.** On pose $\Delta = P^{-1} M P$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.
b. Démontrer que : $M = P\, \Delta\, P^{-1}$.
c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\, \Delta^n\, P^{-1}.$$

5. **a.** On admet que le calcul matriciel précédent donne : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $r_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de r_n et de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6. **a.** On admet que (r_n) est décroissante et que (c_n) est croissante.
Compléter l'algorithme donné **en annexe 4** afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

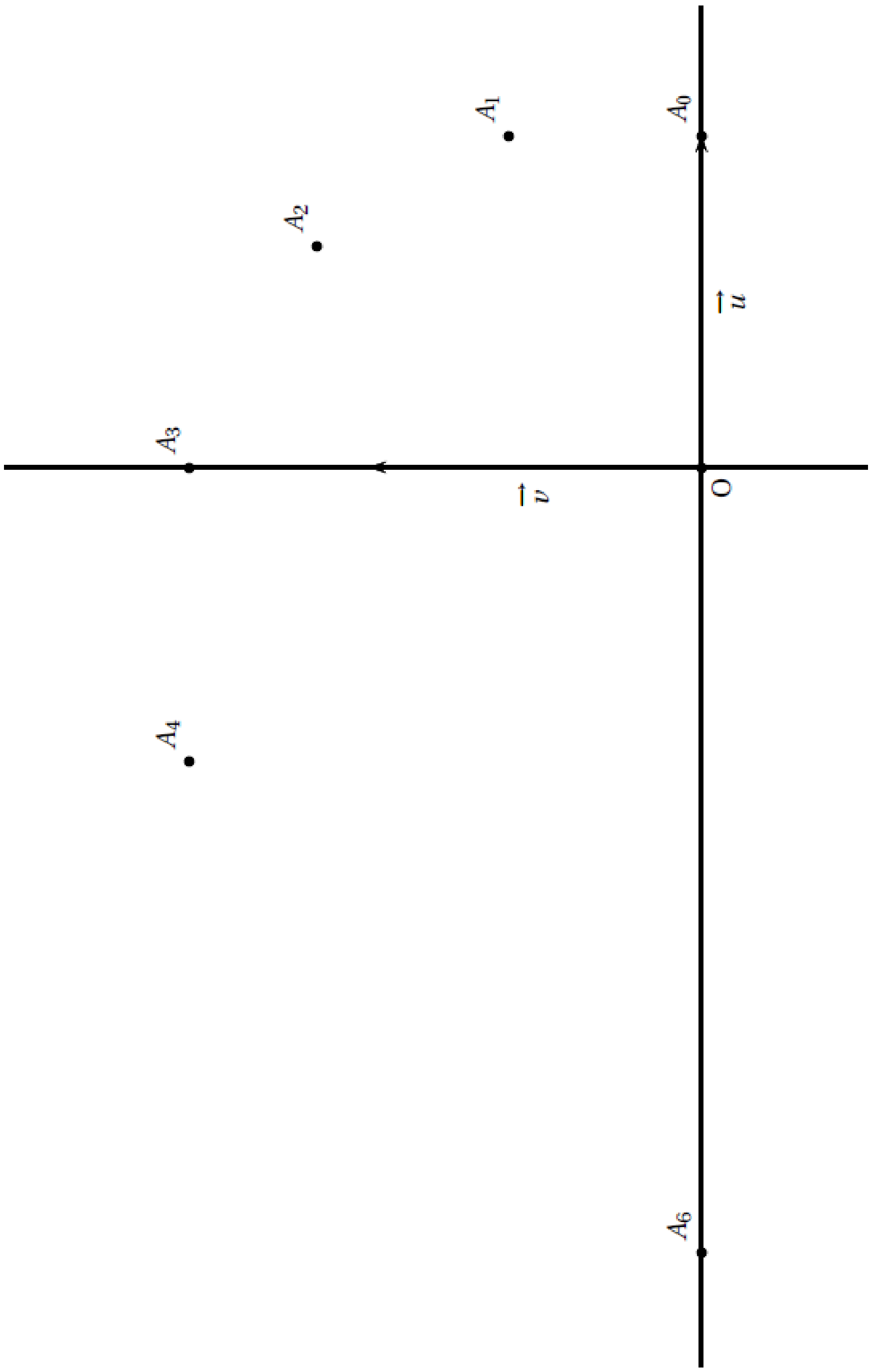
b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

NOM, Prénom et classe : ……………………………………………………………………………

Annexe 1

Exercice 1

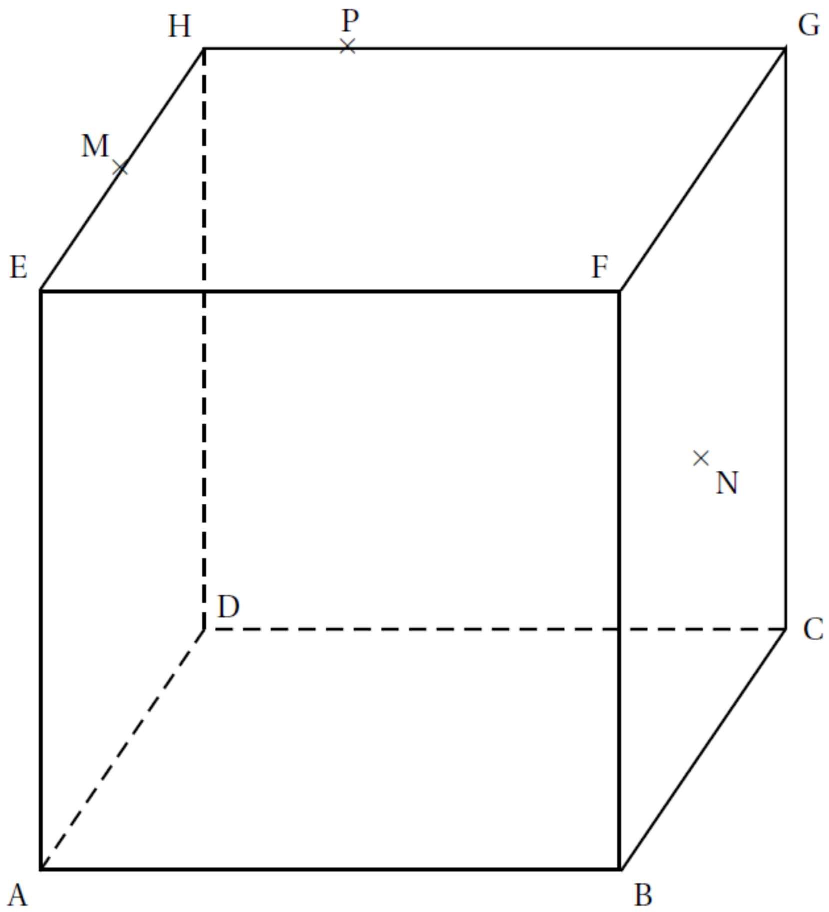
Commun à tous les candidats



NOM, Prénom et classe : …………………………………………………………………………………

Annexe 2

Exercice 3
Commun à tous les candidats



Annexe 3

Exercice 4
Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

NOM, Prénom et classe : ……………………………………………………………………………………

Annexe 4

Exercice 4

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

Entrée :	n, r et c sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	r prend la valeur 90
	c prend la valeur 30
Traitement :	Tant que . . . . . . faire
	n prend la valeur . . . . . .
	r prend la valeur $50 \times 0{,}85^n + 40$
	c prend la valeur . . . . . .
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n