Mardi 16 mai 2017 1°S3

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6 points)*

On considère un jeu de 32 cartes :

- Valeurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as
- Couleur : pique, cœur, carreau, trèfle.

1°) Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilité.
On considère les événements suivants :

- C : « Tirer un cœur »
- F : « Tirer une figure (valet, dame, roi) »

Décrire les événements suivants : $\overline{C}$, $C\cap F$ et $C\cup F$ puis calculer leurs probabilités respectives.

2°) On organise le jeu suivant :
Le joueur mise 5 € puis tire une carte.

- S'il obtient l'as de cœur, il gagne 50 €
- S'il obtient une figure de cœur, il gagne 10 €
- S'il obtient une autre carte de cœur, il est remboursé de ses 5 €
- Dans tous les autres cas, il ne gagne rien !

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en € (mise déduite)

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
Que signifie concrètement cette valeur ?

Exercice 2 *(4 points)*

Soit (E) l'équation : $\sqrt{3}\cos(2x) = \cos(x)$.

1°) Résoudre l'équation (E') : $2X^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}X - 1 = 0$ dans **R**.

2°) On note α le réel de $[0\,;\,\pi/2]$ tel que : $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

En déduire les solutions de l'équation (E) dans **R** puis dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 3 *(4 points)*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{64\sqrt{x}}{(x^2+7)^2}$

1°) Justifier, en utilisant la définition, que f n'est pas dérivable en 0.

2°) Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4 *(6 points)*

Soit u la suite définie sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n}{10+u_n}, \quad n\in\mathbf{N} \end{cases}$

1°) Justifier que u n'est pas une suite arithmétique.

2°) On admet que : $u_n > 0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
Déterminer la monotonie de la suite u.

3°) Soit v la suite définie sur **N** par : $v_n = \dfrac{5}{u_n}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

a) Démontrer que v est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

4°) On admet que l'on peut écrire : $u_n = \dfrac{10}{2+n}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Soit p un entier naturel, résoudre : $0 < u_n < 10^{-p}$.
Application : à partir de quel rang a-t-on $0 < u_n < 0{,}001$?