Mercredi 9 novembre 2016 Term S

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6,5 points)*

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur **N** par :

$u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.
b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a. Calculer w_0.
b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
c. En déduire que pour tout n de **N**, $w_{n+1} = w_n + 2$.
d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de **N** : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 2 *(7,5 points)*

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M′ = f (M) d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que M′ = M.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\mathrm{OM'} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}} \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = (\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MO}}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a. Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.

Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B′ image du point B par f.
Établir que B′ appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.
Placer le point B′ et tracer le cercle (C) dans le repère.

c. En utilisant la question **2**, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M′ par f appartient au cercle (C).

d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question **2**, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M′ par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions **a.** et **b.** peuvent être traitées de façon indépendante.

a. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\mathrm{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$$

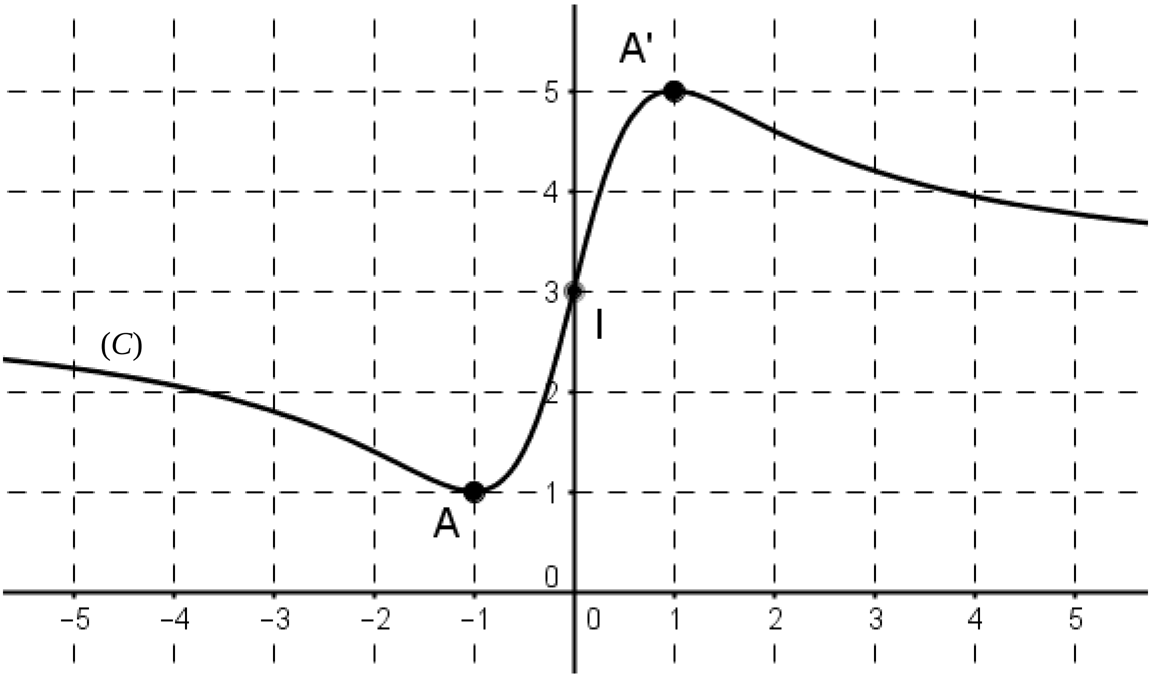
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

b. À l'aide de la question **2**, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 3 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$

Représentée par (C) dans le repère suivant :



1. Sachant que la courbe (C) passe par les points A, I et A', déterminer les réels a, b et c.
2. Montrer que (C) admet une asymptote horizontale (Δ).
3. Montrer que l'on peut écrire : $f(x) = 3+\dfrac{4x}{x^2+1}$
4. Déterminer une expression et le signe de la fonction dérivée f'.

   En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
5. Déterminer les positions relatives de (C) et (Δ).
6. a) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=3$.

   b) Que peut-on en déduire pour le point I(0 ; 3) ?
7. Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = f(|x|)$.

   a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

   b) Expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de (C).