BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION décembre 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a)** Calculer z_1, z_2 et z_3.
b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.
c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi : $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction u sur $[1\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

3. Démontrer qu'il existe un unique réel c de $[1\,;+\infty[$ tel que $u(c) = 0$.
En donner une valeur approchée à 0,1 près.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}.$$

On nomme (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et (D) la droite d'équation $y = x$.

1. Soit a un réel strictement supérieur à 1.
Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse a est parallèle à la droite (D) si, et seulement si, $f'(a) = 1$.

2. a. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = f'(x) - 1.$$

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]1\,;+\infty[$,

$$g(x) = \frac{2u(x)}{(x-1)^2},$$ u étant la fonction définie dans la **Partie A**.

b. En déduire l'existence d'une unique tangente à (C) parallèle à la droite (D).

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{6\sin x}{\cos(2x) - 2}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Démontrer que f est périodique de période 2π.

2. Etudier la parité de f.

3. Démontrer que pour tout réel x on a : $f(\pi/2 - x) = f(\pi/2 + x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

4. On peut donc réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle I = $[0 ; \pi/2]$.

Expliquer comment l'on obtient alors la courbe C_f complète.

5. Calculer $f'(x)$ et démontrer que $f'(x)$ est du signe de $(1 - 2\cos^2 x)\cos x$ sur **R**.

6. Résoudre l'inéquation : $1 - 2\cos^2 x \geq 0$ sur $[0 ; \pi/2]$.

En déduire le sens de variation de f sur I puis dresser son tableau de variations complet sur I.

7. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

8. Tracer la courbe C_f sur $[-2\pi ; 2\pi]$ sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.
b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
b. En déduire que $N_p \equiv p \mod 3$.
c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$.
On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d. On admet que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.
a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots \mod 10.$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots \mod 10.$										

b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.

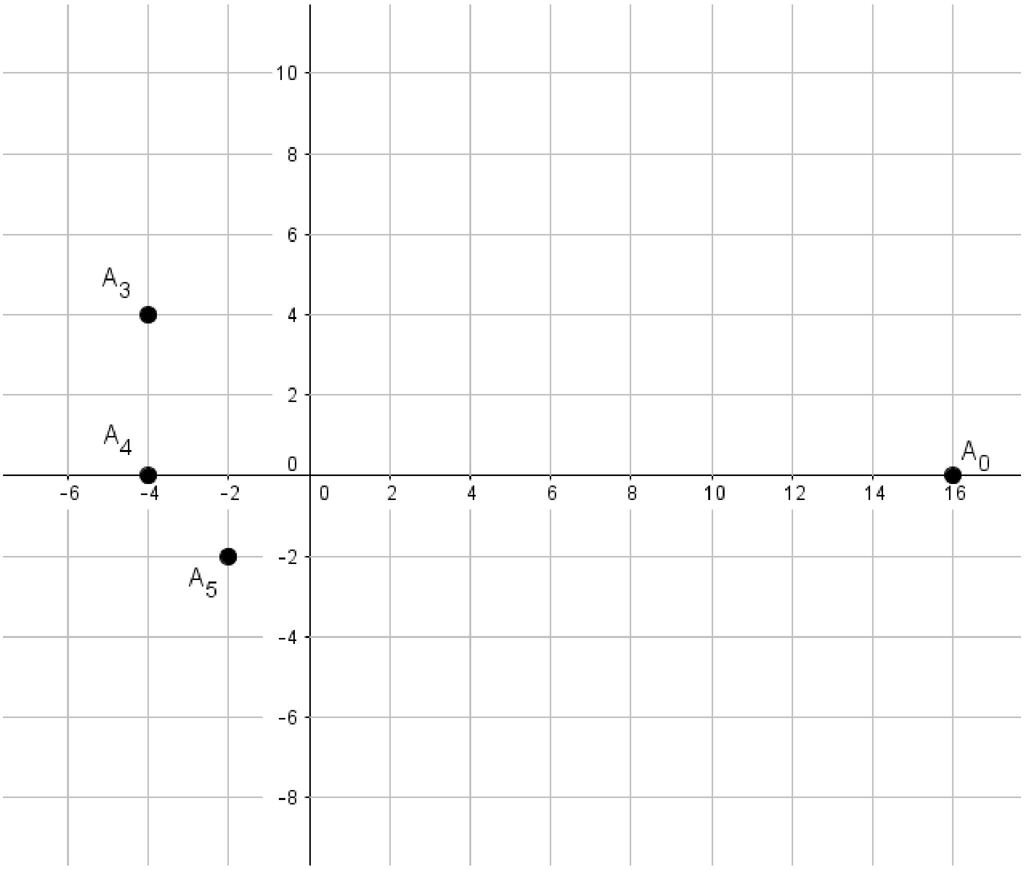
2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Prénom & NOM : ……………………………………………   Classe : ……

<u>Annexe de l'épreuve de Mathématiques du Bac Blanc</u>

Exercice 1



Exercice 3