Nom : Mercredi 1er février 2017

Prénom : TS

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

Calculatrice autorisée
Penser à rendre le sujet

Exercice 1 *(8 points)*

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul,

- A_n l'évènement « la $n^{\text{ième}}$ cible est atteinte » ;
- B_n l'évènement « la $n^{\text{ième}}$ cible n'est pas atteinte » ;
- a_n la probabilité de l'évènement A_n ;
- b_n la probabilité de l'évènement B_n .

1) Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2.
   On peut utiliser un arbre pondéré.

2) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n, \quad \text{puis} \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} .$$

3) Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Préciser son 1er terme u_1.

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

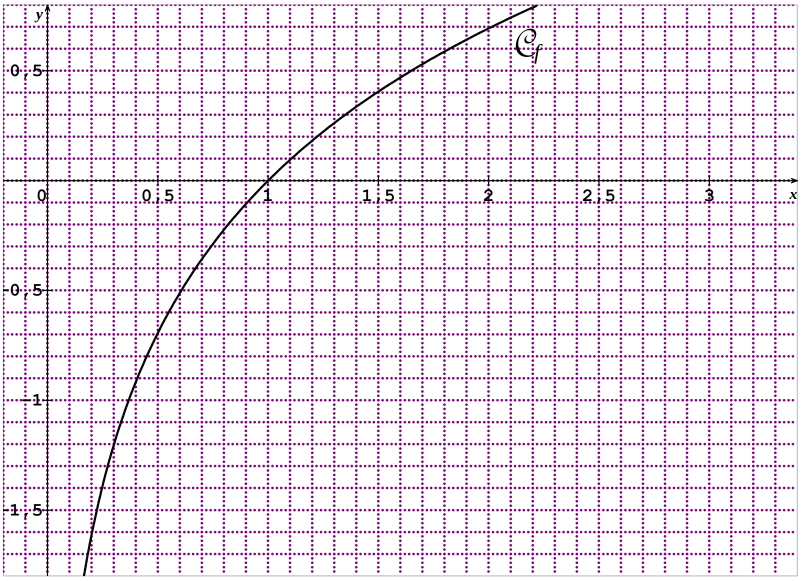
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.

   d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n > 0{,}6665$. Interpréter ce résultat.

<u>Exercice 2</u> *(12 points)*

On s'intéresse à la plus courte distance entre la courbe représentative de la fonction ln et l'origine du repère orthonormé dans lequel elle est représentée.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
M un point situé sur $\mathcal{C}_f$ et on note x l'abscisse de ce point.
Soit d la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ qui à x associe la distance OM.



<u>Partie A –</u>

Il existe une valeur minimale de $d(x)$ atteinte en un réel x_0.
Par lecture graphique, donner un encadrement à 0,1 près de la valeur de x_0.

<u>Partie B –</u>

1) Montrer que $d(x) = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$ pour tout x réel strictement positif.
2) a) Calculer $d'(x)$.
   b) Montrer que, pour x réel strictement positif, le signe de $d'(x)$ est le même que celui de $x^2 + \ln x$.
3) Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.
   a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de g sur $]\,0\,;+\infty[$.
   c) Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;+\infty[$.
   d) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α.
   e) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
4) a) En déduire le tableau de variation de la fonction d sur $]\,0\,;+\infty[$.
   b) Justifier que $\alpha = x_0$.
   c) Montrer que $\ln\alpha = -\alpha^2$, puis que $d(\alpha) = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
5) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la distance la plus courte entre l'origine du repère et $\mathcal{C}_f$.

<u>Partie C –</u>

On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M.

1) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de T et (OM) lorsque la distance OM est minimale ? Tracer cette tangente sur le sujet (ne pas reproduire la figure).
2) a) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.
   b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (OM) lorsque OM est minimale.
   c) Démontrer la conjecture de la question 1.