BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION mars 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   |  d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                   |  Si d ≤ 2
                   |  |  Alors   a prend la valeur 1 − a
                   |  |  Sinon   Si d ≤ 4
                   |  |          |  alors b prend la valeur 1 − b
                   |  |          FinSi
                   |  FinSi
                   |  s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. **Recopier** et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2ème passage boucle Pour					
3ème passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

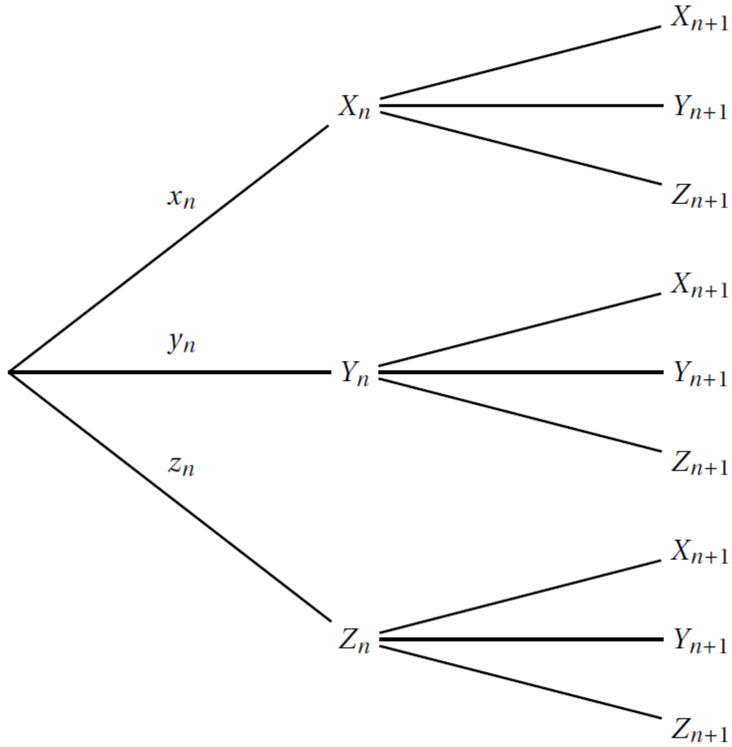
2. Pour tout entier naturel n, on note :
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

c. **Recopier** l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Interpréter le résultat.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
Que peut-on conjecturer pour la valeur prise par z_{3n} pour tout entier naturel n ?
Prouver cette conjecture.

2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 3 (6 points)

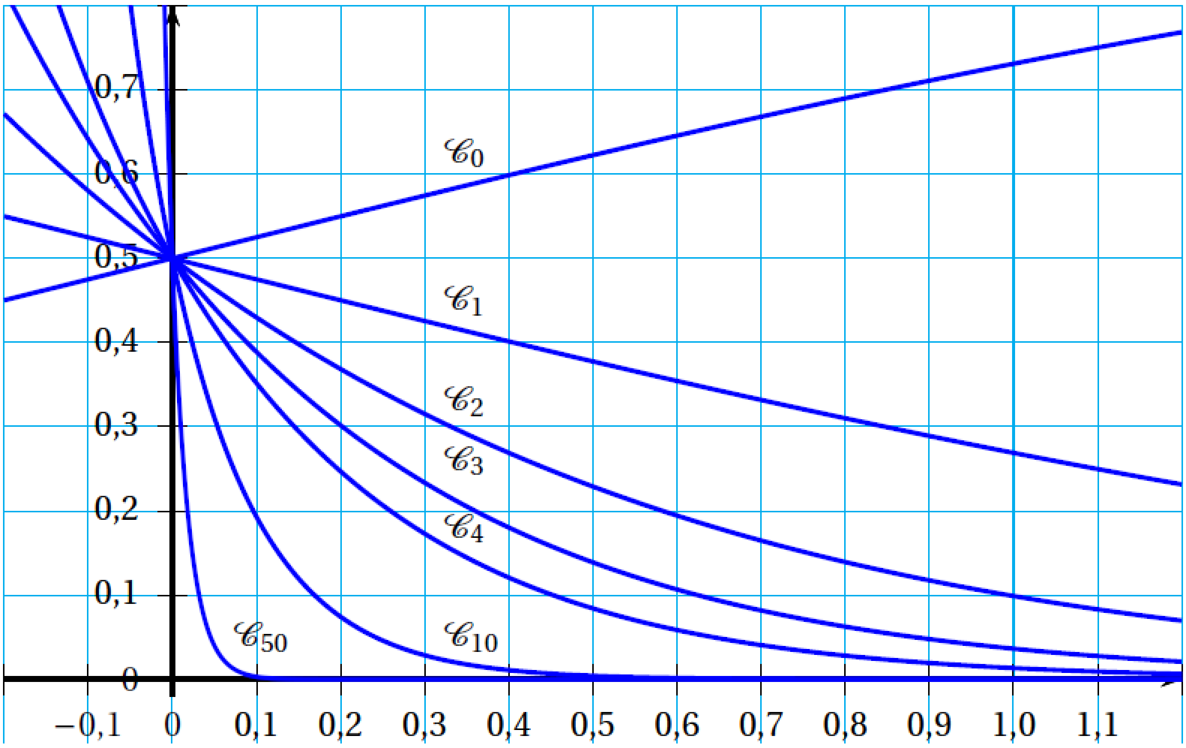
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels **R** par

$$f_n(x) = \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_n$ pour différentes valeurs de n.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.

2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Proposer, à l'aide du graphique ou de la calculatrice, une valeur approchée de u_4 à 0,05 près.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x) = e^{-nx}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

b. En déduire la valeur de ℓ.

c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.

Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1-\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter . . . . .à U
	Affecter . . . . .à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

Exercice 4 (5 points)

Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques.

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la monotonie et la limite de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder.
On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple :

M correspond à $x = 12$ et $7\times12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11$ [26] et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

2. **a.** Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x$ [26] alors $15k \equiv x$ [26].
b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
c. En déduire que $y \equiv 7x + 5$ [26] équivaut à $x \equiv 15y + 3$ [26].

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right)\times 7^n - \frac{5}{6}$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,

$$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right)\times 15^n - \frac{3}{14}.$$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.
Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.
Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.