Mercredi 7 mars 2018 $1°S_3$

Devoir de Mathématiques (1h50.)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x + 3$ et g définie sur $\mathbf{R}\backslash\{2\}$ par : $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

1°) Tracer, en justifiant, les courbes représentatives de f et de g, (C_f) et (C_g), dans un même repère.
2°) Simplifier : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, et montrer que : $\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \frac{-1}{x-2}$.
3°) En déduire la valeur des nombres dérivés $f\,'(1)$ et $g\,'(3)$.
4°) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1 et de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 3. Que remarque-ton ? Compléter le graphique tracé dans le 1°).

Exercice 2 *(7 points)*

1°) Soit ABC un triangle tel que : AB = 5, AC = 6 et BC = 7.
On note B' le milieu de [AC]. Calculer la mesure exacte de BB'.

2°) Soit DEF un triangle tel que : DE = 6, DF = 8 et $\widehat{\text{EDF}} = 60°$. Calculer la mesure exacte de EF.

3°) Soit IJK un triangle tel que : IJ = 4, $\widehat{\text{KIJ}} = 60°$ et $\widehat{\text{KJI}} = 75°$. Calculer la mesure exacte de JK.

4°) Soit LMN un triangle tel que : LM = $4\sqrt{2}$, LN = $2\sqrt{5}$ et MN = 6.
Calculer la mesure exacte de $\widehat{\text{LMN}}$.

Exercice 3 *(8 points)*

Soient A et B deux points distincts, le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$ par deux méthodes différentes.

Partie A – Méthode géométrique.

1°) Démontrer que $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$ équivaut à : $\left(\overrightarrow{\text{MA}} + 2\,\overrightarrow{\text{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\text{MA}} - 2\,\overrightarrow{\text{MB}}\right) = 0$.
2°) Soient I et J les points définis par : $\overrightarrow{\text{AI}} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AJ}} = 2\,\overrightarrow{\text{AB}}$.
Démontrer que pour tout point M, on a : $\overrightarrow{\text{MA}} + 2\,\overrightarrow{\text{MB}} = 3\,\overrightarrow{\text{MI}}$ et $\overrightarrow{\text{MA}} - 2\,\overrightarrow{\text{MB}} = -\,\overrightarrow{\text{MJ}}$.
3°) En déduire que $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$ équivaut à : $\overrightarrow{\text{MI}}$ et $\overrightarrow{\text{MJ}}$ orthogonaux.
4°) Caractériser l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$.

Partie B – Méthode analytique.

Soient A(-5 ; 3), B(1 ; 0) et M(x, y) dans un repère orthonormal.
1°) Démontrer que $\text{MA}^2 = 4\,\text{MB}^2$ équivaut à : $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$.
2°) En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
3°) Soient I et J les points définis par : $\overrightarrow{\text{AI}} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AJ}} = 2\,\overrightarrow{\text{AB}}$.

a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
b) Vérifier que [IJ] est un diamètre du cercle (C).