Vendredi 13 avril 2018 Term ES_2

<u>Interro de Spécialité Mathématiques (55 min.)</u>

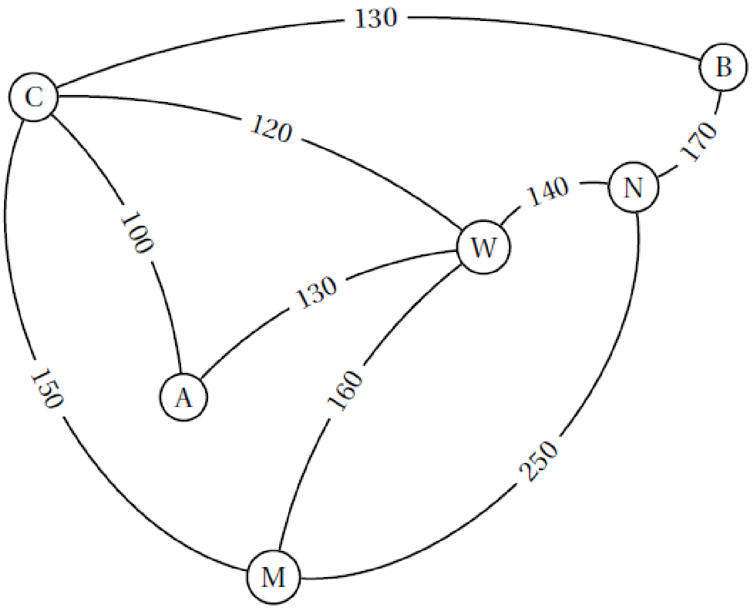
(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(10 points)*

Alexis part en voyage dans l'Est des Etats-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1. **a.** Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

   b. Donner un exemple d'un tel trajet.

2. Alexis veut relier Boston à Miami.

   En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que le coût de ce trajet.

3. **a.** Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

   b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes. Combien y a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

…/…

Exercice 2 *(10 points)*

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.
Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.
Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.
Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.
Chaque mois :

- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A.
On représente ce modèle par un graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B où :

- A est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;
- B est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

Dans la suite de l'exercice, on note :

- a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $a_0 = 0,65$.
- b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Dessiner le graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B.

   b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2. Démontrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

   a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b. Résoudre le système précédent.

   c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3. b.**

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.

   b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
   $v_n = a_n - 0,375$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et préciser le premier terme.

   c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que :
   $a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.