Mercredi 20 septembre 2017 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(8,5 points)*

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

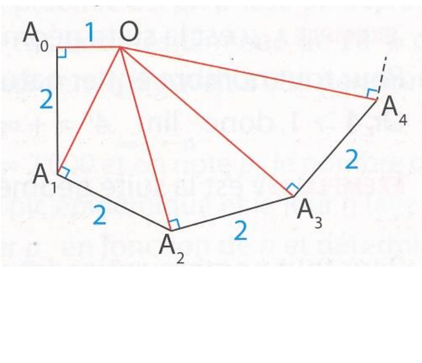
Partie B

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n, puis une expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de n .
3. Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-3} près pour que l'apiculteur ait environ 50000 abeilles au bout de 4 ans.

Exercice 2 *(2 points)*

Sur cette figure : • $OA_0 = 1$
• $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots\ldots = 2$
• les triangles OA_0A_1, OA_1A_2, ….. sont rectangles.



Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n,
$OA_n = \sqrt{4n+1}$.

Exercice 3 *(5 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Partie A

1) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant d'afficher en sortie la valeur de S_n, sachant que la valeur de l'entier naturel n est entrée par l'utilisateur .

```
Variables :     n , U , S , k : entiers naturels
Début :         U prend la valeur ………..
                S prend la valeur ………..
                Saisir n
                Pour k allant de 1 à n
                    U prend la valeur …………………..
                    S prend la valeur …………………..
                Fin Pour
                Afficher S
Fin.
```

2) Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Pour cela, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

k		1	2	3
U	5			
S				

3) Quelle est la valeur S_3 ?

Partie B

L'expression du terme général de la suite (u_n) précédente est $u_n = \frac{7}{2} \times 5^n + \frac{3}{2}$ pour tout n entier naturel.

1) Exprimer S_n en fonction de n.
2) Retrouver la valeur de S_3 calculée dans la partie 3.

Exercice 4 *(4,5 points)*

1) Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

   a) $z_1 = \left(\sqrt{2} + 2i\right)\left(3 - \sqrt{2}\,i\right)$

   b) $z_2 = \dfrac{3}{4 - i}$

2) Résoudre dans **C** les équations suivantes. (On écrira les solutions sous forme algébrique)

   a) (E_1) : $2z + 1 = 2 - i + iz$

   b) (E_2) : $\frac{1}{2}z^2 - \sqrt{7}\,z + 28 = 0$

   c) (E_3) : $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$