Jeudi 12 octobre 2017 Term S_3

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6,5 points)*

1°) Pour tout nombre complexe z, on note :

$$P(z) = z^3 - 3(1 - i)\, z^2 - 2(3 + 7i)\, z + 8 - 40i.$$

a) Montrer que P admet une unique racine réelle que l'on déterminera.

b) Montrer que P admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

c) Déterminer le complexe c tels que, pour tout complexe z :

$$P(z) = (z + 2)(z + 4i)(z + c).$$

En déduire la résolution de l'équation : $P(z) = 0$.

2°) On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = -2,\ z_B = -4i \text{ et } z_C = 5 + i.$$

a) Placer ces trois points dans le plan complexe.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 2 *(3,5 points)*

Soit l'équation (E) : $z^2 = -5 + 12i$ dans **C**.

1°) Soit x et y deux réels tels que $(x + iy)^2 = -5 + 12i$.
Montrer que x est solution de l'équation (E_1) : $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ dans **R**.

2°) Résoudre l'équation (E_2) : $u^2 + 5u - 36 = 0$ dans **R**.

3°) En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 *(2 points)*

Déterminer la limite de la suite définie sur **N** par : $u_n = n - \sqrt{n^2 + n}$.
(On utilisera l'expression conjuguée **et** une factorisation par n)

Exercice 4 *(8 points)*

Partie A

Soit u la suite définie par :

$$u_0 = -3 \text{ et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1.$$

1°) Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, placer sur l'axe des abscisses les points d'abscisse u_0, u_1, u_2 et u_3 en expliquant la méthode utilisée.

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$-3 \leq u_n \leq 3$.

3°) Démontrer que la suite u est croissante.

4°) En déduire que la suite u est convergente.

5°) Soit ℓ la limite de la suite u, montrer que ℓ est solution de l'équation : $\frac{2}{3} x + 1 = x$.

En déduire la valeur de ℓ.

Partie B

Soit v la suite définie par :

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n : \quad v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n + 1.$$

1°) Placer sur l'axe des abscisses <u>du repère précédent</u> les points d'abscisse v_0, v_1, v_2 et v_3. (aucune explication n'est demandée ici)

2°) Soit w la suite définie par $w_n = v_n - 3$, pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que w est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

3°) En déduire la limite de la suite v.

4°) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

a) Déterminer une expression de S_n en fonction de n.

b) Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (S_n) ?