# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## SESSION novembre-décembre 2017

# MATHÉMATIQUES

## Série S

**Durée de l'épreuve : 4 heures** **Coefficient : 7 ou 9**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices correspondant à sa spécialité.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

**Exercice 1 (4 points)**

***Commun à tous les candidats***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point $M$ d'affixe $z$, on associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point $M'$ est appelé image du point $M$.

**1.** Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

**2.** Soit $M$ un point d'affixe $z$ et $M'$ son image d'affixe $z'$.
On note $N$ le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que $M$ est le milieu du segment $[NM']$.

**3.** Dans cette question, on suppose que le point $M$ ayant pour affixe $z$, appartient au cercle $C$ de centre O et de rayon 1. On note $\theta$ un argument de $z$.

**a.** Déterminer le module de chacun des nombres complexes $z$ et $z_N$, ainsi qu'un argument de $z_N$ en fonction de $\theta$.

**b.** Sur la figure donnée en annexe page 8, on a représenté un point $M$ sur le cercle $C$. Construire sur cette figure les points $N$ et $M'$ en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

**c.** Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle $AMM'$ ?

**La page 8 contenant l'annexe est à rendre avec la copie**

**Exercice 2 (6 points)**

***Commun à tous les candidats***

**Partie A.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Dresser le tableau de variation de $g$ sur $[0\ ;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;+\infty[$ une unique solution que l'on notera $\alpha$. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

3. Déterminer le signe de $g$ sur $[0\ ;+\infty[$.

**Partie B.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

On note $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. La courbe $C_f$ admet-elle une (des) asymptote(s) ?
3. Calculer la dérivée de $f$ sur $[0\ ;1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty[$ et montrer que. $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de $f$.

**Partie C.** Soit $(d)$ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Calculer $f(x) - (x + 2)$, puis déterminer la position relative de $C_f$ et de $(d)$ sur $[0\ ;1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty[$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+2)\right)$.

*(On dit que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ en $+\infty$)*

**Exercice 3 (5 points)**

***Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.***

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

**Partie A**

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite ($un$) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9\, u_n\,(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n$, $u_n$ modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

**1.** Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

**2.** On admet que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 1].

**a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9\, u_n$.

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

**c.** Déterminer la limite de la suite ($u_n$). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

**3.** Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
Variables :     u est un réel
                n est un entier naturel
Traitement :    u prend la valeur 0,3
                n prend la valeur 0
                Tant que . . . faire :
                |
                |
                |
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher . . .
```

**Partie B**

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite ($v_n$) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06\, v_n\,(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, $v_n$ modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

**1.** Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

**2.** On admet que, dans ce modèle, la suite ($v_n$) est croissante et convergente. On appelle $\ell$ sa limite.

Montrer que $\ell$ vérifie : $\ell = 1,06\, \ell\,(1 - \ell)$.

**3.** La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

**Exercice 3 (5 points)**

***Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.***

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $a$ est un entier naturel |
| | $b$ est un entier naturel |
| | $c$ est un entier naturel |
| Initialisation : | Affecter à $c$ la valeur 0 |
| | Demander la valeur de $a$ |
| | Demander la valeur de $b$ |
| Traitement : | Tant que $a \geq b$ |
| | Affecter à $c$ la valeur $c + 1$ |
| | Affecter à $a$ la valeur $a - b$ |
| | Fin tant que |
| Sortie : | Afficher $c$ |
| | Afficher $a$ |

1) Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$. Pour cela, recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs des variables à chaque étape, puis donner les valeurs affichées.

| Variables | $c$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| Initialisation | | | |
| Traitement | | | |
| | | | |
| | | | |

2) Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre compris entre 0 et 25.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre $m$ correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note $p$.

Etape 3 : Au nombre $p$, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Coder la lettre U.
2) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'à une valeur de $m$ entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de $p$, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

| | |
|---|---|
| Variables : | $m$ est un entier naturel |
| | $p$ est un entier naturel |
| Initialisation : | Demander la valeur de $m$ |
| | Affecter à $p$ la valeur …………. |
| Traitement : | Tant que ………….. |
| | Affecter à $p$ la valeur ………….. |
| | Fin tant que |
| Sortie : | Afficher $p$ |

Partie C

1) Trouver un nombre entier $x$ tel que $9x \equiv 1\ [26]$.
2) Démontrer alors que si $9m + 5 \equiv p\ [26]$ alors $m \equiv 3p - 15\ [26]$.
3) Démontrer la propriété réciproque de l'implication précédente.
4) Décoder alors la lettre B.

**Exercice 4 (5 points)**

***Commun à tous les candidats***

*Pour chacune des dix questions suivantes, indiquer l'unique bonne réponse parmi les quatre qui sont proposées. 0,5 point est attribué pour chaque réponse exacte, une absence de réponse ou une réponse inexacte n'est pas pénalisée.*
*Ne pas recopier les questions et les réponses : Ne donner que le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

**1.** Soit $z$ un nombre complexe non nul ayant pour argument $\theta$, alors un argument du nombre complexe $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

**a)** $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $-\dfrac{\pi}{3}-\theta$ **c)** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **d)** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

**2.** Pour tout nombre complexe $z$, $|z+i|$ est égal à :

**a)** $|z-i|$ **b)** $|z|+1$ **c)** $|z-1|$ **d)** $|i\overline{z}+1|$

**3.** Soit M un point du plan complexe d'affixe $z$, et $(C)$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On peut dire que $\mathrm{M}\in(C)$ si et seulement si :

**a)** $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$. **b)** $\overline{z}=z$. **c)** $z^2+1=0$. **d)** $z\overline{z}-1=0$.

**4.** Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels (avec $a\neq 0$) et (E) l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue complexe $z$.
On peut dire que $z$ est solution de (E) si et seulement si :

**a)** $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$ sont solutions de (E).
**b)** $\overline{z}$ est solution de (E).
**c)** $-z$ est solution de (E).
**d)** $\dfrac{1}{z}$ est solution de (E).

**5.** Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+i|$ est la droite d'équation :

**a)** $y=x-1$. **b)** $y=-x$. **c)** $y=-x+1$. **d)** $y=x$.

**6.** Soit A, B et C trois points distincts du plan complexe d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$ non nulles.

**a)** A, B et C sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0\ [2\pi]$.

**b)** A, B et C sont alignés si et seulement si : $\dfrac{z_C}{z_A}=\dfrac{z_B}{z_A}$.

**c)** Si $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

**d)** Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires alors $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

**7.** Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ (et de premier terme non nul).

**a)** Si $q > 1$, alors $u$ est croissante.
**b)** Si $q < 1$, alors $u$ est décroissante.
**c)** Si $q > 1$, alors $u$ est divergente.
**d)** Si $q < 1$, alors $u$ est convergente.

**8.** Soit $u$ une suite numérique.

**a)** Si $u$ diverge vers $+\infty$, alors $u$ est croissante et non majorée.
**b)** Si $u$ est croissante alors $u$ est convergente et majorée.
**c)** Si $u$ est croissante alors $u$ est divergente et non majorée.
**d)** Si $u$ est croissante alors $u$ est minorée.

**9.** Soit $f$ une fonction définie sur **R** et $u$ une suite numérique définie par :
$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a)** Si $f$ est croissante, alors $u$ est croissante.
**b)** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $u$ est divergente.
**c)** Si $f$ est bornée alors $u$ est bornée.
**d)** Si $f$ est croissante et majorée, alors $u$ est convergente.

**10.** Soit $u$ et $v$ deux suites numériques, telles que pour tout entier naturel $n$ : $u_n > 0$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

**a)** Si $u$ est croissante alors $v$ est décroissante.
**b)** Si $u$ est convergente alors $v$ est convergente.
**c)** Si $u$ est convergente alors $v$ est divergente.
**d)** Si $u$ est divergente alors $v$ est convergente.

Prénom & NOM : ………………………………………… Classe : ……

***<u>Annexe de l'épreuve de Mathématiques du Bac Blanc</u>***

**Exercice 1**