Mercredi 10 janvier 2018 Term S_3

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(8 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel *n*.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} i$.

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de *n*.

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque *n* tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Demander la valeur de *P*

Traitement	*R* prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n + 1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2} R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher *n*

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?

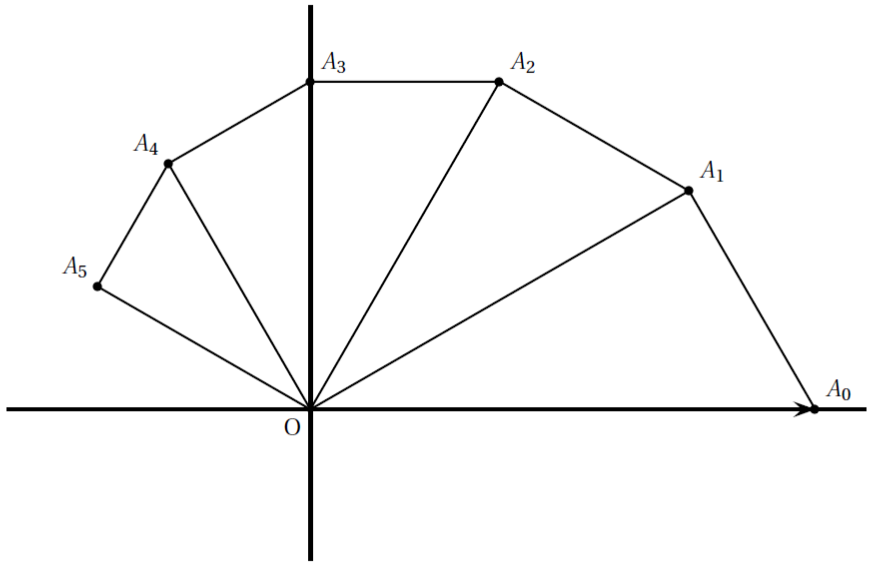
b. Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. Démontrer par récurrence que : $z_n = r_n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

c. Déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

d. Compléter la figure donnée ci-dessous, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9. (Les traits de construction seront apparents.)



<u>Exercice 2</u> *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = 4 \sin^4 x + 3 \cos(2x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Démontrer que f est périodique de période π.

2°) Etudier la parité de f.

3°) En déduire que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle I = $[0 ; \pi/2]$
et expliquer comment l'on obtient alors la courbe C_f complète à partir de cet intervalle.

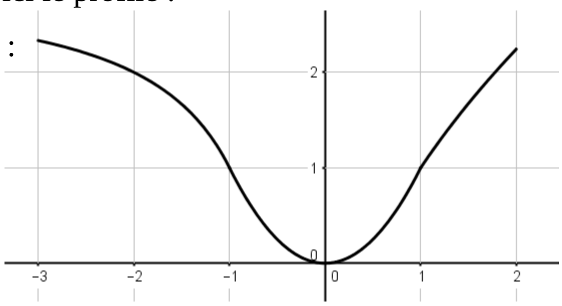
4°) Démontrer que l'on peut écrire : $f'(x) = 4 \sin x \cos x \,(4 \sin^2 x - 3)$.

5°) Résoudre l'inéquation : $4 \sin^2 x - 3 \geq 0$ sur $[0 ; \pi/2]$.
En déduire les variations de f sur I puis dresser son tableau de variations complet sur I.

6°) Tracer la courbe C_f sur $[-\pi ; \pi]$.

<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

Une société de design travaille sur un nouveau modèle dont voici le profile :



On y retrouve la courbe de la fonction f définie sur $[-3 ; 2]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x} + 3 & \text{si} \quad -3 \leq x < -1 \\ f(x) = x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 3\sqrt{x} - 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de la fonction f en –1 et en 1.

2°) Etudier la dérivabilité de la fonction f en –1 et en 1.