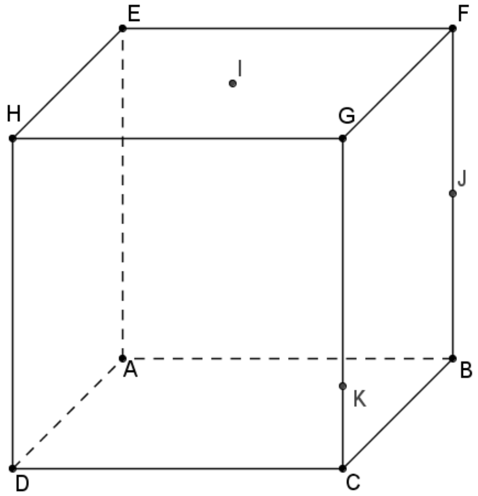
NOM et prénom : ……………………………………………………………………
Mercredi 11 avril 2018 Term S_3

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)



Exercice 1 *(10 points)*

Soit ABCDEFGH un cube. On note :

- I le milieu de [FH]
- J le milieu de [FB]
- K le point tel que : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$

Ne pas reproduire la figure :
Les constructions seront réalisées sur le sujet.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le but de cette partie est de tracer la section du cube par le plan (IJK).

1°) a) Justifier que les droites (JK) et (BC) sont sécantes. Construire leur point d'intersection L.
b) Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont sécantes. Construire leur point d'intersection M.

2°) Que représente la droite (LM) par rapport aux plans (IJK) et (BCD) ? (Justifier)

3°) On admet que (KI) et (AC) sont sécantes. Construire leur point d'intersection N.
Démontrer que les points L, M et N sont alignés.

4°) À l'aide de la droite (LM), construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).

Partie B

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

1°) Donner, sans justification, les coordonnées des points : B, C, D, F, G et H.

2°) En déduire, en justifiant, les coordonnées des points : I, J et K.

3°) Justifier que : $\begin{cases} x = k \\ y = 1 \text{ où } k \in \mathbf{R}, \\ z = 0 \end{cases}$ est un système d'équation paramétrique de la droite (BC)

et que : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t \end{cases}$ où $t \in \mathbf{R}$, est un système d'équation paramétrique de la droite (JK).

En déduire les coordonnées de leur point d'intersection L.

4°) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (IJ) et (BD).
En déduire les coordonnées de leur point d'intersection M.

5°) On admet que (KI) et (AC) sont sécantes en $N\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{6};\ 0\right)$.
Démontrer que L, M et N sont alignés.

…/…

<u>Exercice 2</u> *(10 points)*

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur **R** par $f_1(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur **R** et on note f_1' sa dérivée.

- **a.** Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-2x}(1 - x)$.
- **b.** Étudier les variations de la fonction f_1 sur **R**.
- **c.** Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
- **d.** Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F_1 définie sur **R** par : $F_1(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{-2x}$ soit une primitive de la fonction f_1 sur **R**.
En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,

$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x} f_n(x).$$

- **b.** En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,

$$f_{n+1}(x) \le f_n(x).$$

- **c.** Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

2. Soit n un entier naturel non nul.

- **a.** Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$,

$$0 \le f_n(x) \le \mathrm{e}^{-2nx}.$$

- **b.** En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.