

Interrogation de Mathématiques (55 min.)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (15 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note A et B les points d'affixes respectives : $a = 4i$ et $b = 2$.

À tout point M du plan, distinct de B, d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z - 4i}{z - 2}$$

- On note :
- (E_1) : l'ensemble des points M, tels que M' soit sur le cercle de centre O et de rayon 1
 - (E_2) : l'ensemble des points M, tels que M' soit sur l'axe des réels.
 - (E_3) : l'ensemble des points M, tels que M' soit sur l'axe des imaginaires purs.

Partie A

Soient M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives : $z_1 = 5 + 4i$, $z_2 = 3 - 2i$ et $z_3 = 3 + i$.

1°) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

- 2°) a) Déterminer l'affixe z'_1 du point M'₁ associé à M₁.
b) Justifier que $M_1 \in (E_1)$.
- 3°) a) Déterminer l'affixe z'_2 du point M'₂ associé à M₂.
b) Justifier que $M_2 \in (E_2)$.
- 4°) a) Déterminer l'affixe z'_3 du point M'₃ associé à M₃.
b) Justifier que $M_3 \in (E_3)$.

Partie B

- 1°) a) Interpréter géométriquement $\left| \frac{z - 4i}{z - 2} \right|$ en fonction de M.
b) Interpréter géométriquement $|z'|$ en fonction de M'.
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E_1) .
- 2°) a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{z - 4i}{z - 2}\right)$ en fonction de M.
b) Pour z' non nul, rappeler la propriété du cours sur $\arg(z')$ pour que z' soit réel.
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E_2) .
d) Pour z' non nul, rappeler la propriété du cours sur $\arg(z')$ pour que z' soit imaginaire pur.
e) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E_3) .

Exercice 2 (5 points)

Résoudre dans \mathbf{C} l'équation suivante :

$$z^2 + 4\bar{z} = 3.$$

(On pourra écrire $z = x + iy$ avec x et y réels)