Mercredi 28 novembre 2018 $1°S_3$

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

I/ Valeurs absolues. *(8 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = |4x - x^2| + |2x + 3| - x^2$.

1°) Déterminer les valeurs exactes de $f(^3/_2)$ et $f(-\sqrt{2})$.

2°) Déterminer le signe de $4x - x^2$ suivant les valeurs de x.
En déduire les différentes expressions de $f(x)$, sans le symbole valeur absolue, en fonction de x à l'aide d'un tableau. (Penser à vérifier le tableau avec les valeurs du 1°)

3°) Déterminer la forme canonique de $P(x) = -2x^2 + 6x + 3$.
En déduire les coordonnées du sommet la parabole d'équation $y = -2x^2 + 6x + 3$.

4°) Tracer la courbe (C_f) représentative de f, dans un repère orthonormal.

5°) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ puis vérifier les solutions sur le graphique.

II/ Formules de trigonométries. *(4 points)*

On rappelle que, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), on a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1°) Démontrer que, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), on a : $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2°) Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ tel que : $\tan x = -\frac{3}{5}$.

- **a)** Parmi les intervalles suivant : $I_1 =]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $I_2 =]\frac{\pi}{2} ; \pi[$, $I_3 =]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[$ et $I_4 =]-\frac{\pi}{2} ; 0[$, à quel(s) intervalles(s) peut appartenir x ? Justifier.
- **b)** Calculer $\cos x$ et $\sin x$. (On considérera deux cas…)

III/ Angles associés. *(3 points)*

Simplifier, en justifiant l'expression :

$$A = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{4\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{8\pi}{8} + \cos\frac{9\pi}{8}.$$

IV/ Parabole et hyperbole. *(5 points)*

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ et (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Soit a un réel non nul, on définit les points : $A(0 ; -a^2)$, $B\left(\frac{a}{2} ; 0\right)$, $C\left(0 ; \frac{2}{a}\right)$ et $D(2a ; 0)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de chacune de droites (AB) et (CD) en fonction de a.
(On pourra vérifier le cas $a = 2$ avec les équations données dans le 3°)

2°) a) Démontrer que la droite (AB) et la courbe (P) ont un unique point d'intersection dont on déterminera les coordonnées en fonction de a.
b) Démontrer que la droite (CD) et la courbe (H) ont un unique point d'intersection dont on déterminera les coordonnées en fonction de a.

3°) Faire une figure en prenant $a = 2$.
Dans ce cas, on a alors : (AB) d'équation $4x - y - 4 = 0$ et (CD) d'équation $x + 4y - 4 = 0$.