Mercredi 20 mars 2019 $1°S_3$

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1. *(4 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

On note (C_f) sa courbe représentative et A le point de coordonnées : A(1 ; –2).

1°) Pour tout $a \neq 1$, déterminer $f\,'(a)$.

2°) En déduire une équation de la tangente (T_a) à la courbe (C_f) au point d'abscisse a, en fonction de a.

3°) Démontrer que la droite (T_a) passe par A si et seulement si a est solution de l'équation :

(E) : $2a^2 + 5a + 2 = 0$.

4°) En déduire qu'il existe exactement deux points de (C_f) en lesquels la tangente à la courbe passe par le point A. Donner les coordonnées de ces deux points et les équations des tangentes respectives.

Exercice 2. *(3 points)*

1°) Résoudre dans **R**, puis dans $]-\pi : \pi]$ l'équation : $2\sin(2x) + 1 = 0$.

2°) Simplifier, en justifiant l'expression :

$$A = \cos\frac{\pi}{10} \times \sin\frac{3\pi}{5} \times \cos\frac{5\pi}{5} + \sin\frac{9\pi}{10} \times \cos\frac{10\pi}{5} \times \sin\frac{19\pi}{10}$$

Exercice 3. *(3,5 points)*

Dans un repère orthonormé, on note (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$.

1°) Déterminer les coordonnées du centre Ω et la valeur du rayon R du cercle (C).

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J du cercle (C) avec l'axe des ordonnées.

3°) Soit A(–2 ; 3), déterminer une équation de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.
Que représente cette droite pour le cercle (C) ?

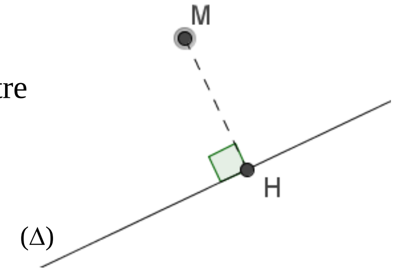
4°) Soit (C') le cercle de centre Ω'(5 ; –1) et de rayon $R' = 3\sqrt{5}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C').

b) Démontrer que la droite (d) est tangente au cercle (C') en un point B que l'on déterminera.

…/…

Exercice 4. *(3 points)*



Soit (Δ) une droite de vecteur normale $\vec{n}$ et M un point quelconque.
On appelle distance du point M à la droite (Δ) la plus courte distance entre le point M et un point de la droite (Δ), c'est alors la distance de M à son projeté orthogonal H sur la droite (Δ) :

$d(\mathrm{M}, \Delta) = \mathrm{MH}$

1°) Justifier que $\left|\overrightarrow{\mathrm{MH}}.\vec{n}\right| = \mathrm{MH} \times \|\vec{n}\|$

2°) On note : $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$, $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}}\ ;\ y_{\mathrm{H}})$ et $\vec{n}(a\ ;\ b)$.
Ecrire $\overrightarrow{\mathrm{MH}}.\vec{n}$ en fonction de x, y, x_{H}, y_{H}, a et b.

3°) La droite (Δ) a pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.
Sachant que le point H appartient à la droite (Δ), simplifier l'écriture précédente pour obtenir $\overrightarrow{\mathrm{MH}}.\vec{n}$ en fonction de x, y, a, b et c.

4°) En déduire que : $d(\mathrm{M}, \Delta) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5°) Application : Utiliser la formule précédente pour calculer la distance du point M(–1 ; 2) à la droite (Δ) d'équation : $3x - 4y + 1 = 0$.

Exercice 5. *(6,5 points)*

On considère une classe de 32 élèves.

1°) Voici le relevé des notes obtenues par la classe, un jour où il y avait deux absents :

x_i : note	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19
n_i : effectif	1	2	1	3	4	4	3	2	3	4	1	1	1

- **a)** Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance v, et l'écart-type σ de la série statistique. (On donnera les formules, les calculs intermédiaires et des valeurs à 10^{-2} près)
- **b)** Déterminer la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3. (On expliquera la méthode utilisée)
- **c)** Représenter le diagramme en boîte (« boîte à moustache ») de la série statistique (x_i ; n_i).

2°) Les deux absents ont composé le lendemain, voici les nouvelles valeurs calculées par le professeur pour ce devoir :

$\bar{x}' = 11{,}75$ σ ' = $\sqrt{10{,}375}$ $Me' = 11{,}5$ $Q_1' = 9$ $Q_3' = 14$.

On note x et y les notes obtenues par les deux absents (avec $x \leq y$).

- **a)** Quelles informations sur x et y obtient-on avec le fait que la médiane n'a pas changé ?
- **b)** Quelles informations sur x et y obtient-on avec les nouvelles valeurs des quartiles ?
- **c)** Démontrer que : $x + y = 19$ (On pourra noter : $\mathrm{N} = \Sigma n_i x_i$)
- **d)** Démontrer que : $x^2 + y^2 = 193$ (On pourra noter : $\mathrm{C} = \Sigma n_i {x_i}^2$)
- **e)** En déduire que x est solution de l'équation : $x^2 - 19x + 84 = 0$
- **f)** Déterminer les notes des deux élèves absents.