Mardi 09 octobre 2018 Term S_3

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

1°) Pour tout nombre complexe z, on note : $P(z) = 8z^3 - 12(2-i)z^2 + 50z - 75(2-i)$.

a) Montrer que P admet deux racines imaginaires pures que l'on déterminera.

b) Déterminer les complexes a et b tels que, pour tout z : $P(z) = (4z^2 + 25)(az + b)$.

c) On déduire toutes les racines complexes de P.

2°) On note A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -\frac{5}{2}i$, $z_B = \frac{5}{2}i$ et $z_C = 3 - \frac{3}{2}i$.

a) Placer ces trois points dans le plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 2 *(3 points)*

Soient $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives :

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des réels.

1°) Ecrire le produit $z\,\overline{z'}$ sous forme algébrique.

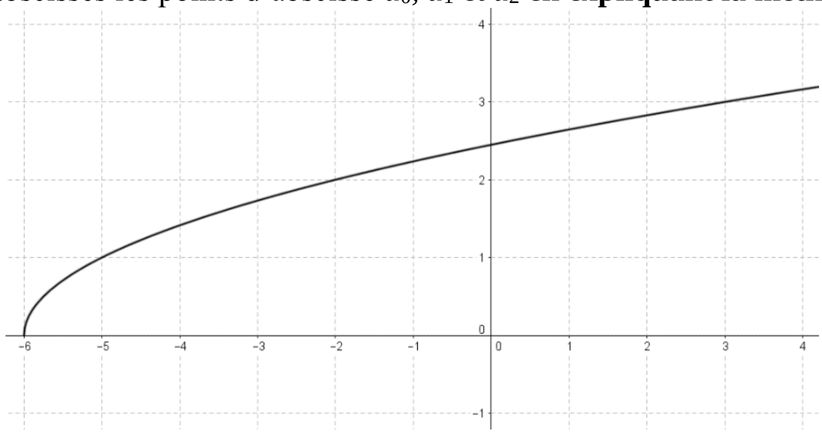
2°) A quelle propriété sur $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ équivaut la propriété : $z\,\overline{z'}$ est réel ?

3°) A quelle propriété sur $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ équivaut la propriété : $z\,\overline{z'}$ est imaginaire pur ?

Exercice 3 *(8 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1°) On a tracé **ci-dessous** la courbe (C) d'équation : $y = \sqrt{x+6}$.
Construire sur l'axe des abscisses les points d'abscisse u_0, u_1 et u_2 **en expliquant la méthode utilisée**.



2°) Calculer u_1 et u_2.

3°) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $-5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

4°) En déduire que la suite u est convergente.

5°) Soit ℓ la limite de la suite u, montrer que ℓ est solution de l'équation : $\sqrt{x+6} = x$.

6°) En déduire la valeur de ℓ.

7°) Soit p un entier naturel, on souhaite savoir à partir de quel entier n on a : $|u_n - 3| < 10^{-p}$.
Ecrire un algorithme permettant de trouver la valeur plus petite valeur de n connaissant la valeur de p.

Exercice 4 *(4 points)*

Déterminer les limites suivantes : **1°)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2+3^n}{3+2^n}$ **2°)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+4n}{\sqrt{4+n^2}}$