Mercredi 30 janvier 2019 Term S

<u>DEVOIR de Mathématiques (1h50)</u>

(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(6 points)*

Chaque jour, Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là)
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle A_n l'événement « Bill achète du pain le $n^{\text{ème}}$ jour » et on note $p_n = P(A_n)$.

Aujourd'hui (le 1^er jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1°) Calculer p_2 et p_3.

2°) Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5\, p_n$.

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$

5°) **a)** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

<u>Exercice 2</u> *(6 points)*

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 10\, e^{u(x)}$
où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $u(x) = -\,e^{2-\frac{x}{10}}$
On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1°) Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -\,u(x)\, e^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

2°) **a)** Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3°) On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}\, u(x)\, e^{u(x)}\, (1 + u(x)).$$

a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

…/…

<u>Exercice 3</u> *(8 points)*

Partie A – <u>Restitution organisée des connaissances</u>

<u>Prérequis :</u> la fonction sinus est dérivable en zéro et son nombre dérivé en zéro est 1.

<u>Démonstration :</u> Démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Partie B – <u>Application</u>

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par :

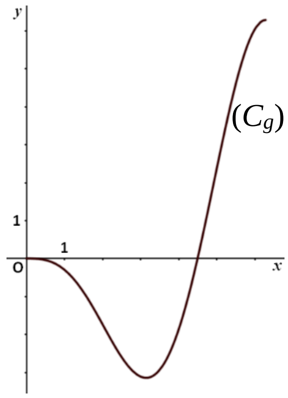
$f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \in]0 ; 2\pi]$.

L'objet de cet exercice est d'étudier précisément la fonction f sur $[0 ; 2\pi]$.

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0 ; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x).$$



a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

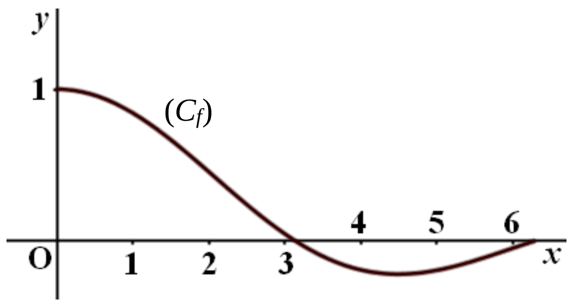
b) Démontrer qu'il existe un unique nombre α de $[\pi ; 2\pi]$ tel que $g(x) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

2°) Etude de la fonction *f*

a) Démontrer que la fonction f est continue en zéro.

b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

c) On a tracé ci-dessous la courbe (C_f) représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.



Justifier que la fonction f admet un minimum pour $x = \alpha$ et que $f(\alpha) = \cos(\alpha)$.