BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION mars 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices correspondant à sa spécialité.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

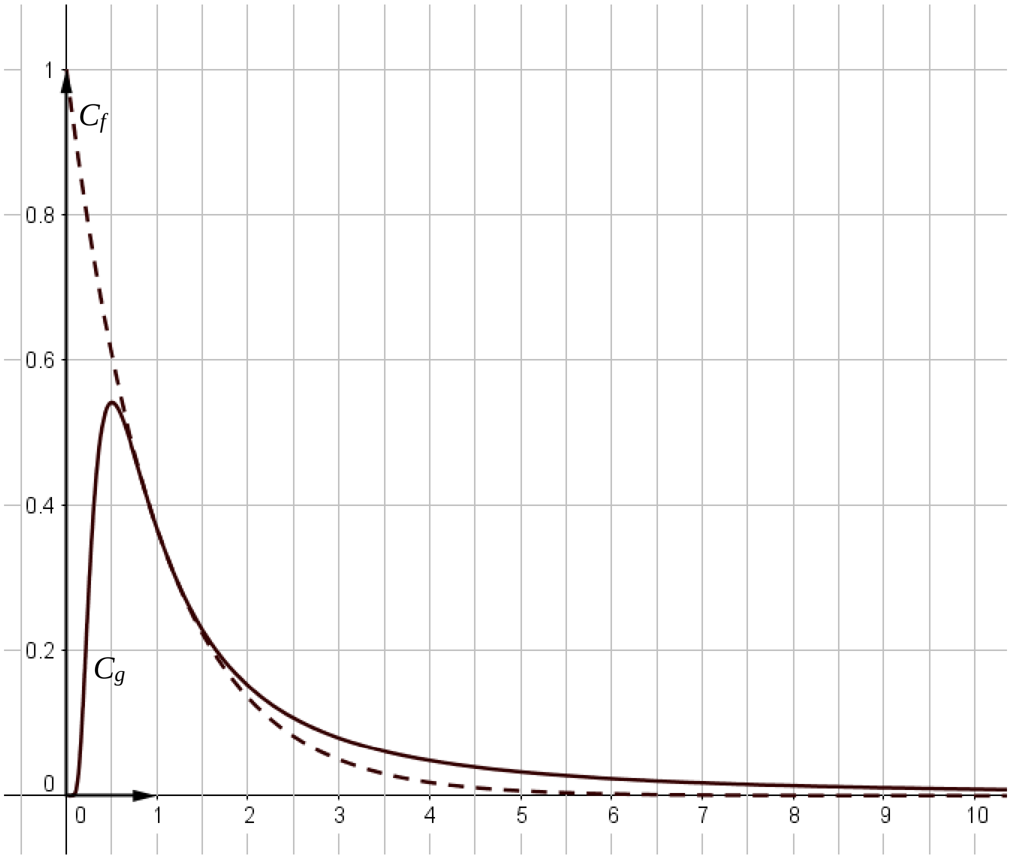
Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

On admet que f et g sont dérivables sur]0 ; +∞[. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives. Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement C_f et C_g sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur]0 ; +∞[.

2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur]0 ; +∞[.

Partie B – Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}$$

b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
c. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$$

4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes C_f et C_g

1. Démontrer que la point A de coordonnées $(1\,; e^{-1})$ est un point d'intersection de C_f et C_g.
On admet que ce point est l'unique point d'intersection de C_f et C_g, et que C_f est au-dessus de C_g sur l'intervalle $]0\,;1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = e^{-a} + e^{-\frac{1}{a}} - e^{-b} - e^{-\frac{1}{b}}$$

3. Démontrer que :

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = 1 - 2e^{-1}$$

4. On admet que :

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Interpréter graphiquement cette égalité.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes)

Un joueur fait une partie en deux étapes :

- Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
- Deuxième étape :
    - si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
    - si le dé indique 2, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte la voyelle A et il perd dans le cas contraire.
    - si le dé indique 3, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie cette boule porte la voyelle A ou O et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la boule tirée.
On définit les événements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 »
D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 »
G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1) **a)** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.
b) Montrer alors que $p(G) = \frac{1}{5}$.

2) Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3) Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

4) Quel nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante :

$z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{3} z_n + \frac{2}{3}i$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i)$.

3. a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b. Démontrer que

$\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - i| = 0$.

c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a. Soit n un entier naturel, déterminer un argument de u_n.

b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$y = -x + 1$.

Exercice 4 (5 points)

Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leq u_n \leq e^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a. Démontrer que la suite (vn) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \qquad \text{et, pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

1. **a.** Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10}.
b. Que peut-on conjecturer sur le PGCD de u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.
a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = -v_n$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

c. Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b.**

Partie B

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer F^2 et F^3. On pourra utiliser la calculatrice.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. **a.** Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2.$$

4. On donne $u_{12} = 144$.
Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
Donner la longueur des deux autres côtés.