Mercredi 2 octobre 2019 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50.)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(2,5 points)*

Soient les nombres complexes : $z = 1 + 2i$ et $z' = 3 - 4i$, écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1°) $z_1 = (\overline{z+3})(z' + i)$

2°) $z_2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$.

Exercice 2 *(4,5 points)*

Résoudre dans **C** les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1°) (E_1) : $(1 - i)\, z + i = iz - 4$.

2°) (E_2) : $2z + 3i = i\bar{z} - 1$.

3°) (E_3) : $z^2 + 2z + 3 = 0$.

Exercice 3 *(4 points)*

Soit l'équation (E) : $4z^3 + 12(1 - i)\, z^2 + (25 - 36i)\, z - 75i = 0$ dans **C**.

1°) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.

2°) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$4z^3 + 12(1 - i)\, z^2 + (25 - 36i)\, z - 75i = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z.

3°) En déduire la résolution de (E) dans **C**.

…/…

<u>Exercice 4</u> *(6 points)*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M) \qquad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Dans la suite, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.
c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T > 40
        T ← 0,8 T + 2
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous indiquant à chaque étape les valeurs prises par les variables.

	T	n
	80	0
Etape 1		
Etape 2		
⋮	⋮	⋮

Quelle valeur numérique contient donc la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

<u>Exercice 5</u> *(3 points)*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{2}{2n + 1}$.