BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION décembre 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Une calculatrice non programmable
ou une calculatrice programmable en mode examen
est autorisée, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices correspondant à sa spécialité.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3.$$

1. Etudier les variations de g.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans **R** et que $1 < \alpha < 2$.

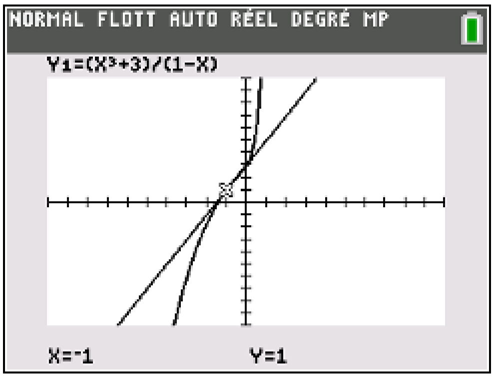
3. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{1 - x}$$



1. Voici une copie de l'écran d'une calculatrice graphique sur laquelle on a tracé la courbe (C_f) représentative de f et la droite (d) d'équation : $y = 2x + 3$.
Emettre une conjecture sur les variations de f ainsi que sur la position de (C_f) par rapport à (d).

2. Déterminer les limites de f en 1, en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. **a)** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$
b) En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.
c) Le résultat est-il conforme à la première conjecture ?

4 **a)** Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $x = -1$.
b) Factoriser l'expression : $f(x) - (2x + 3)$
c) En déduire la position de (C_f) par rapport à (d) en fonction de x sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.
d) Le résultat est-il conforme à la deuxième conjecture ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,11111111
4	2	0,01369863
5	3	0,0017094
6	4	0,00021363
7	5	2,6703E-05
8	6	3,3379E-06
9	7	4,1723E-07
10	8	5,2154E-08
11	9	6,5193E-09
12	10	8,1491E-10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?

2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

Exercice 2 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \bmod 3$.
b. En déduire que $N_p \equiv p \bmod 3$.
c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \bmod 7$.
On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \bmod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c. Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

d. On admet que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \bmod 10$.
a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots \bmod 10.$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots \bmod 10.$										

b. En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \bmod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation (E) : $25z^2 - 14z + 25 = 0$.

1. Résoudre dans **C** l'équation (E).
On écrira les solutions sous forme algébrique.

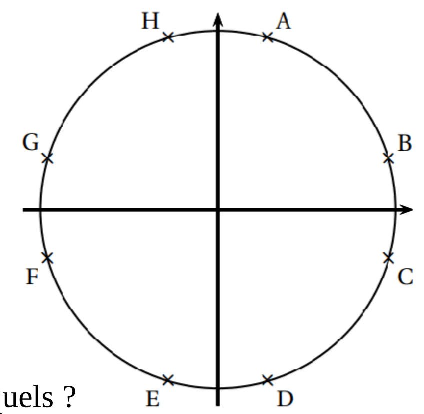
2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.

3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.

4. La figure ci-contre fait apparaître huit points du cercle unité.
Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Affirmation A :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = 1.$$

2. Soit z le nombre complexe $\frac{1}{6}(2 + 5i)$.

Affirmation B :

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. On rappelle que, pour tout nombre réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Affirmation C :

Pour tout nombre réel a de $[-\pi\ ;\ 0]$ tel que $\cos(2a) = \frac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\frac{3}{5}$.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

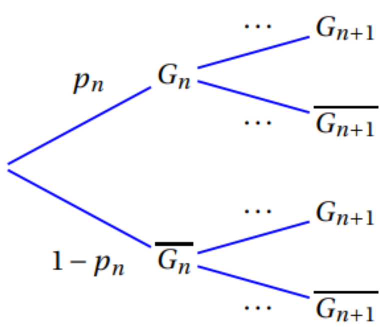
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ?
Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €.
Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.