Mercredi 22 janvier 2020 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50.)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(4,5 points)*

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte.
À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse.
Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$.
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$.
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.
Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
On note A, B, C et M les évènements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ?
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

…/…

Exercice 2 *(7 points)*

Soit la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = (2 + \cos 2x) \sin x$.

1°) **a)** Déterminer la parité de f.

b) Montrer que f est périodique de période 2π.

c) Comparer, pour tout réel x, $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Expliquer comment on passe du tracé sur I, au tracé sur **R**.

2°) Vérifier que :

$$f'(x) = (3 - 6 \sin^2 x) \cos x$$

En déduire les variations de f sur I.

3°) Tracer la courbe C_f représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi ;2\pi]$ dans un repère orthogonal.

Exercice 3 *(8,5 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$$

1. Étudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α que l'on déterminera.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur **R** en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal et (D_1), (D_2) les droites d'équations respectives : $y = x$ et $y = -3x$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. En déduire le tableau de variations de f.

4. Montrer que la droite (D_1) : $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$, c'est-à-dire que : $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.

5. Montrer de la même façon que la droite (D_2) est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$.

6. Tracer la courbe (C_f) ainsi que les droites (D_1) et (D_2).