BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION mars 2020

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Une calculatrice non programmable
ou une calculatrice programmable en mode examen
est autorisée, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices correspondant à sa spécialité. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 2 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2{,}9$ puis pour $a = 3{,}1$.

2) Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - u_n + \frac{3}{2}$., montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.

3) Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.

   a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4) Dans cette question, on prend $a = 3{,}1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   a. A l'aide des questions précédentes, montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
   Recopier et compléter cet algorithme.

P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U …………
Tant que ……………
        P ← …………
        U ← …………
Fin Tant que
```

Exercice 2 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \qquad (F).$$

1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n,
on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

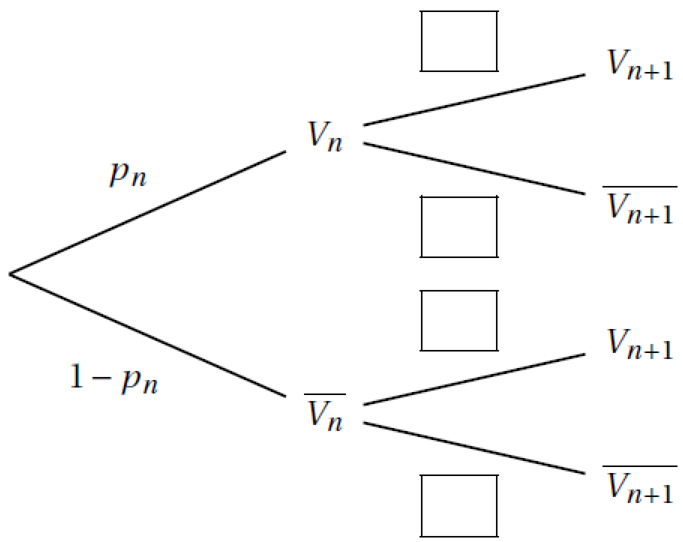
On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a. A : « les 2° et 3° sondages sont positifs » ;
b. B : « les 2° et 3° sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3° sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
b. Exprimer p_n en fonction de n.
c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

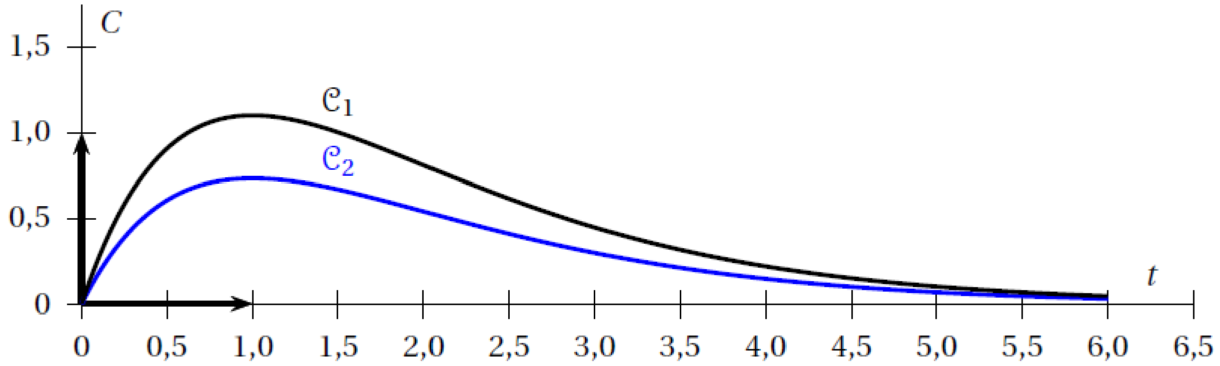
Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = At\,\mathrm{e}^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.
b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B – Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(t)=2t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Une heure après avoir bu ses deux verres de rhum, Paul veut savoir combien de temps il doit encore attendre avant de prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

a. Démontrer que, dans l'intervalle $[1\ ;+\infty[$, il existe un unique réel α tel que : $f(\alpha)=0,2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il encore attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t)=2t\,\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $C>5\times10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t+p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?