Mercredi 7 octobre 2020 Terminale Spé Maths 1

DEVOIR (2 h)

Calculatrice autorisée

Exercice 1 *(10 points)*

Les parties B et C sont indépendantes, elles ont pour objectif de vérifier par deux méthodes différentes, les conjectures émises dans la partie A.

Soit u la suite définie sur **N** par :

$u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 2$ pour tout entier naturel n.

Partie A

1°) Tracer les droites (d) : $y = \frac{3}{4}x + 2$ et (Δ) : $y = x$ dans un repère orthonormé (unité : 1 cm)
Construire sur l'axe des abscisses, en expliquant la méthode utilisée, les 5 premiers termes de la suite u.
2°) Emettre une conjecture sur la monotonie et la convergence de la suite u.

Partie B

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $-4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 8$.
2°) Que peut-on en déduire sur la monotonie et la convergence de u ?
3°) Justifier que si u converge vers un réel l, alors l est solution de l'équation : $x = \frac{3}{4}x + 2$.
Conclure.

Partie C

Soit v la suite définie sur **N** par : $v_n = u_n - 8$ pour tout entier naturel n.
1°) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2°) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3°) Retrouver la monotonie et la convergence de la suite u (sans utiliser les résultats de la partie B)
4°) On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exprimer S_n en fonction de n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 2 *(4 points)*

Soit u la suite définie sur **N*** par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

1°) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de u_1, u_2 et u_3.
2°) En encadrant $n + \sqrt{k}$ pour tout entier k compris entre 1 et n, démontrer que pour tout entier n non nul, on a : $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$
3°) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - x}$

1°) Déterminer, en justifiant, les limites de f en $-\infty$, en -1, en 0, en 1 et en $+\infty$.
2°) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f) représentative de f.