Lundi 2 décembre 2020 Terminale Spé Maths 1

DEVOIR (90 min)

Calculatrice autorisée

Exercice 1 *(14 points)*

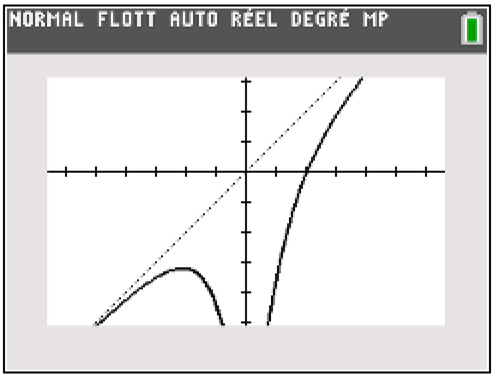
Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = x^3 + 3x + 16$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur **R**, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.



Partie B

Soit f la fonction définie sur **R** par :

$f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x^4 - 8x}{x^3 + x}$ si $x \neq 0$.

La courbe (C_f) représentative de f et la droite (d) d'équation $y = x$ sont représentées ci-contre :

1°) Valider ou réfuter, **en justifiant**, chacune des trois conjectures suivantes :

a) L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe (C_f).
b) La droite (d) est une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.
C'est-à-dire que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$.
c) Pour tout $x \neq 0$, on a : $f(x) < x$.

2°) La fonction f est-elle continue en 0 ?

3°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4°) Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{x\, g(x)}{(x^2+1)^2}$.
(On ne demande pas la dérivabilité en 0)

5°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

6°) Montrer qu'il existe deux points de (C_f) où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (d).
(On donnera juste l'abscisse de ces deux points)

Exercice 2 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{3x+4}{x+2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x+4} & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue sur **R**.

2°) f est-elle dérivable en -1 et en 0 ?
Déterminer les équations des tangentes (ou demi-tangentes) en ces points.