BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ

SESSION mars 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices.**

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

<u>Exercice 1</u> – (5 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

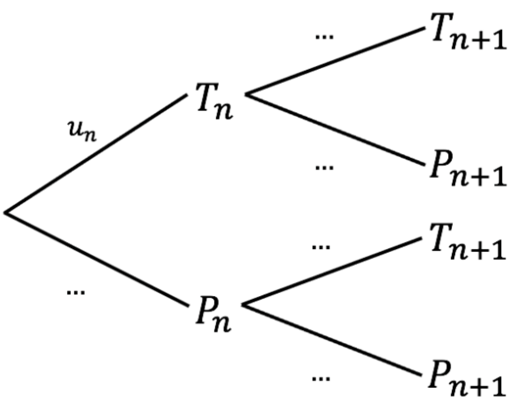
T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = p(T_n)$, où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1) a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$ et $p(P_1)$, puis des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$ et $p_{P_1}(P_2)$.
   b) Calculer $p_{P_1}(T_2)$.
   c) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

2) a) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.
   c) A l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 2) c) ?

Exercice 2 – (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1) Étudier les variations de u sur $]0\,;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$.
   On note α cette solution.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.
3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Montrer l'égalité : $\alpha^2 = 2 - \ln(\alpha)$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln(x))^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$.

1) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2u(x)}{x}$.
2) En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et indiquer pour quelle valeur de x, f admet un extremum. (*le calcul des limites en 0 et +∞ n'est pas demandé*)

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\,)$, on note :

- (Γ) la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;2)$;
- M le point de (Γ) d'abscisse x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1) Montrer que la distance MA est donnée par $MA = \sqrt{f(x)}$.
2) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;+\infty[$.
   b) Montrer que la distance MA est minimale en un point de (Γ), noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c) Montrer que $PA = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

<u>Exercice 3</u> – (6 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(5;-5;2)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;1;2)$ et $D(6;6;-1)$.

1) a) Montrer que le triangle BCD est rectangle en C.
   b) Calculer l'aire de ce triangle BCD.

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (BCD) et passant par A.

4) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (d) et du plan (BCD).

5) Déterminer la distance du point A au plan (BCD).

6) Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

7) a) Calculer les longueurs AB et AC, puis calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

<u>Exercice 4</u> – (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1	La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{a}{x}+b}$, avec a et b deux réels positifs. La courbe représentant la fonction f admet pour asymptote en $+\infty$, la droite d'équation :	
	a) $y=\sqrt{a+b}$	b) $y=\sqrt{b}$
	c) $x=\sqrt{b}$	d) $x=\sqrt{a}$
2	La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^{x^2+2}$. Sa fonction dérivée g' est définie sur $\mathbb{R}$ par :	
	a) $g'(x)=2xe^{x^2+2}$	b) $g'(x)=(1+2x^2)e^{x^2+2}$
	c) $g'(x)=(1+x)e^{x^2+2}$	d) $g'(x)=(1-2x^2)e^{x^2+2}$
3	La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3-12x^2+15x+45$. Cette fonction est :	
	a) convexe sur $]-\infty\,;4]$	b) convexe sur $[4\,;+\infty[$
	c) convexe sur $\mathbb{R}$	d) concave sur $\mathbb{R}$
4	Une classe compte 20 garçons et 10 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. La probabilité que sur 5 jours consécutifs, 4 filles exactement soient interrogées est environ :	
	a) 0,008	b) 0,041
	c) 0,156	d) 0,996
5	Une urne contient 200 boules dont 50 sont rouges. On tire successivement et avec remise 10 boules de cette urne. La probabilité d'obtenir entre 3 et 5 boules rouges (inclus) est environ :	
	a) 0,204	b) 0,455
	c) 0,730	d) 0,980
6	Lorsqu'on représente un schéma de Bernoulli de paramètres n = 20 et p = 0,3 par un arbre, le nombre de chemins menant à exactement 5 succès est :	
	a) 100	b) 15504
	c) 0,179	d) 6