Lundi 18 octobre 2021 Terminale Spé Maths 6

# ***Devoir (1h50)***

*Calculatrice autorisée*

**Exercice 1** *(7 points)*

Le 1er janvier 2021, Jean ouvre un compte en banque et dépose 150 €.
Il décide de verser 150 € tous les 1ers du mois.
Son compte est rémunéré à 0,2 % par mois et on calcule les intérêts tous les mois.
On note $u_0$ le montant sur son compte le 1er janvier 2021 et $u_n$ le montant dont il dispose le 1er du n-ième mois suivant janvier 2021.

**1°)** Calculer $u_1$ et $u_2$ au centime près.

**2°)** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$
où $f$ est la fonction définie sur **R** par : $f(x) = 1{,}002\,x + 150$.

**3°)** Déterminer le réel $\alpha$ solution de l'équation : $f(x) = x$.

**4°)** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = u_n - \alpha$.
Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique, on précisera son premier terme et sa raison.

**5°)** Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 75\,150 \times (1{,}002)^n - 75\,000$.

**6°)** De quelle somme disposera Jean sur son compte le 1er janvier 2022 ?

**7°)** Jean souhaite savoir au bout de combien de temps il aura au moins 3 000 € sur son compte.

a) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il permette de répondre à la question de Jean.

```
u = …
n = 0
while … :
    u = 1.002*u + 150
    n = …
print(n)
```

b) À partir de quel jour Jean aura-t-il au moins 3 000 € sur son compte ?
(On donnera la réponse, grâce à la calculatrice, sans justification)

…/…

**<u>Exercice 2</u>** *(7 points)*

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur **N** par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1.$$

On souhaite étudier le comportement de cette suite à l'infini par deux méthodes différentes.

**Partie A**

**1°)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**2°)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $n - 3 \leq u_n \leq n + 3$.

**3°)** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie B**

**1°)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

**2°)** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**<u>Exercice 3</u>** *(6 points)*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{x}}$

**1°)** Déterminer les limites de $f$ en 0, 1, 2 et $+\infty$.

**2°)** En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $(C_f)$ représentative de $f$.