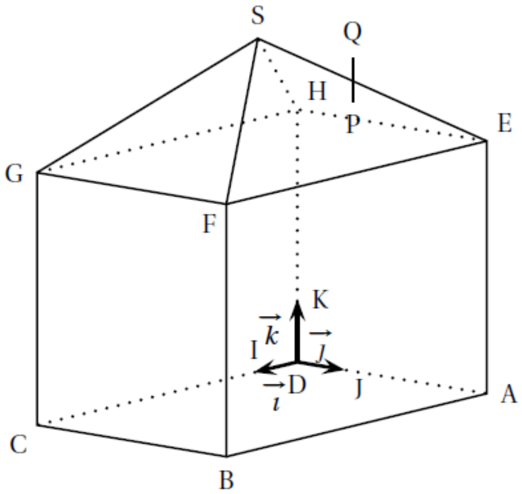
Devoir (1h50)

Calculatrice autorisée

Exercice 1 *(10 points)*

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.
On a DC = 6, DA = DH = 4.
Soit les points I, J et K tels que
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{(aire de la base)} \times \text{hauteur.}$$
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :
   - le point P appartient au plan (EFS) ;
   - le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
   - la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5{,}5 + t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

   b. En déduire les coordonnées du point P.

   c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.
5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4 + 6s \\ y & = & 7 - 4s \\ z & = & 2 + 4s \end{array}\right. \qquad (s \in \mathbb{R})$$
   Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
   L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

Exercice 2 *(10 points)*

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

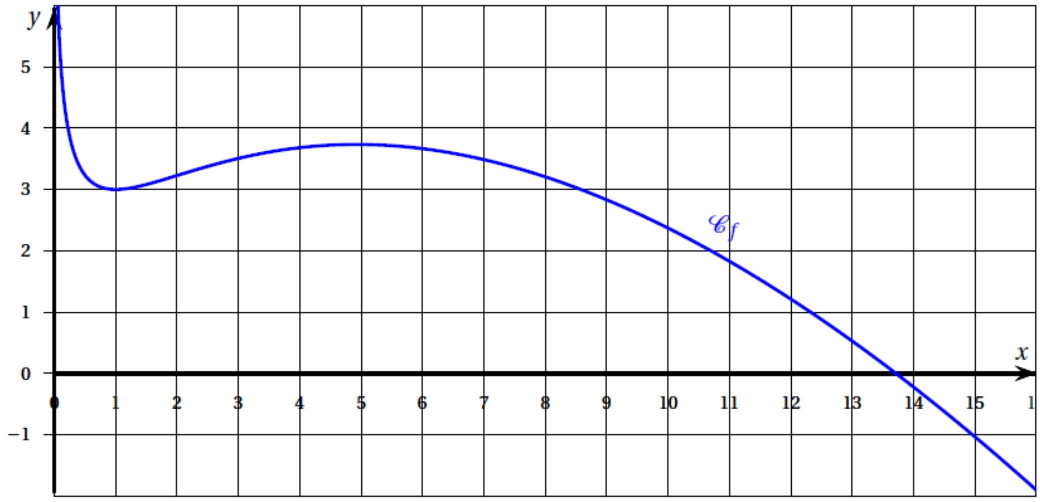
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.
   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.