NOM et Prénom : ……………………………………………………………………………………

Lundi 25 septembre 2023 Term Spé Maths 3

Interrogation (55 min.)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(5 points)*

1°) Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 6$.

a) Pour tout entier naturel n, donner une expression de u_n en fonction de n.
b) Calculer u_{40}.
c) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{40}$.

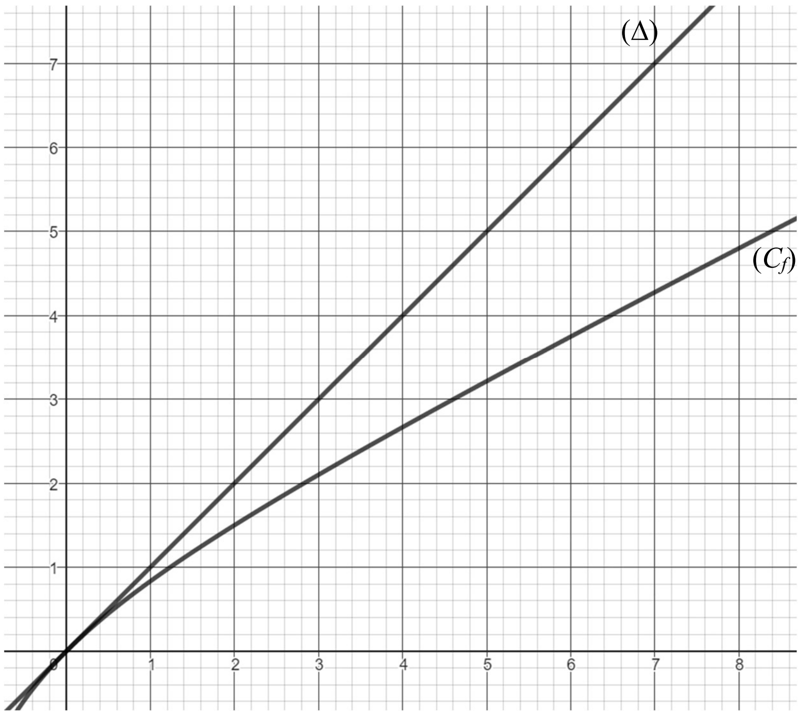
2°) Soit v une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 4$.

a) Pour tout entier naturel n, donner une expression de v_n en fonction de n.
b) Calculer v_{10}.
c) Calculer : $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.

Exercice 2 *(5 points)*

Soit u la suite définie par :
$u_0 = 6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

La courbe (C_f) est tracée ici, ainsi que la droite (Δ) : $y = x$.



1°) Expliquer en détail la méthode permettant d'obtenir les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses à partir du point $A_0(u_0 ; 0)$ et des courbes (C_f) et (Δ).

2°) Réaliser cette construction sur le graphique ci-contre.
(**Laisser les traits de construction**)

3°) D'après la construction obtenue, que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite u ?

4°) La fonction f a pour équation : $f(x) = \frac{x+2}{2} - \frac{2}{x+2}$.
En déduire les valeurs exactes de u_1 et u_2.

…/…

Exercice 3 *(4 points)*

Soit u la suite définie sur $\mathbf{N}^*\backslash\{1\}$ par : $u_2 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3\,u_n + 1}{u_n + 3}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$.

Exercice 4 *(6 points)*

Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n+2} - \frac{n+2}{2}$

2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2 + e^{-n}}{2n+1}$

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - n^2 + \sqrt{n}}{n^2 + 2}$

4°) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n - \sqrt{n^2 + 2}$